

TENTAMEN

KURSNAMN	Digital signalbehandling
PROGRAM: namn åk / läsperiod	Elektro- och dataingenjörslinjen årskurs 2/läsperiod 3
KURSBETECKNING	LET390 0196
EXAMINATOR	Sven Knutsson
TID FÖR TENTAMEN	Fredag 27 augusti 2004 kl 13.30 – 17.30
HJÄLPMEDEL	Typgodkänd räknare
ANSV LÄRARE: namn telnr besöker tentamen kl	Sven Knutsson 772 57 27 14.45 och 16.00
DATUM FÖR ANSLAG av resultat samt av tid och plats för granskning	Resultat anslås senast fredag 3 september 2004 Tentamenslösning presenteras på kursens hemsida fr o m 30 augusti 2004
ÖVRIG INFORM.	Motivera alla uppställda samband och påståenden, dvs ge inte bara svar utan fullständiga lösningar

NAMN (tentand): **LÖSNING**_____



1. För tidsdiskreta system är linjaritet, tidsinvarians och ofta kausalitet viktiga. Förklara dessa egenskaper

(3 poäng)

För ett linjärt system skall superposition vilket innebär att består insignalen av flera delsignaler så skall vi få samma resultat om vi summerar delsignalerna och skickar denna summa genom systemet eller om vi skickar varje delsignal och summerar utsignalerna i stället. Det skall även gälla att en skalning av insignalen skall ge samma skalning av utsignalen

$$\left. \begin{array}{l} x_1[n] \rightarrow y_1[n] \\ x_2[n] \rightarrow y_2[n] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1[n] + x_2[n] \rightarrow y_1[n] + y_2[n] \\ K \cdot x_1[n] \rightarrow K \cdot y_1[n] \end{array} \right.$$

Tidsinvarians innebär att själva tiden då insignalen ansluts inte skall spela någon roll. Sker det senare så skall utsignalen komma samma tid senare men se lika dan ut

$$x[n - n_0] \rightarrow y[n - n_0]$$

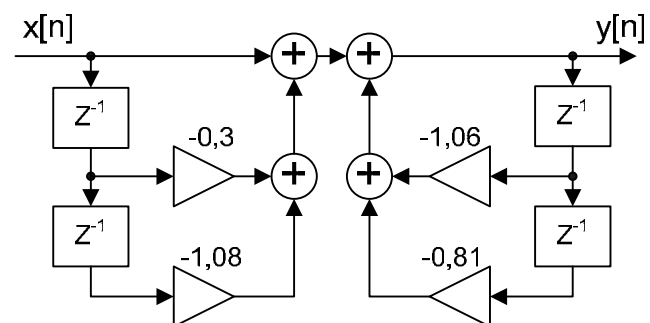
Kausalitet innebär att systemets differensekvation bara får innehålla insignaler från nyvarande och tidigare tidpunkter och utsignaler från tidigare tidpunkter. Det får inte finnas signaler i ekvation från framtida tidpunkter

2. Ett digitalt system beskrivs av block-schemat i Figur E2

- Är systemet stabilt?
- Skissa systemets beloppsspektra
- Bestäm utsignalen från systemet i intervallet $0 \leq n \leq 5$ om systemets insignal ges av $\{0,5; 0,3; -0,2; 0,9; -0,4\}$ då $0 \leq n \leq 4$ och i övrigt är noll (0)

(2+2+2 poäng)

Figur E2 Systemets blockschema



- Vi börjar med att ta fram systemets differensekvation och får

$$y[n] = x[n] - 0,3 \cdot x[n-1] - 1,08 \cdot x[n-2] - 1,06 \cdot y[n-1] - 0,81 \cdot y[n-2]$$

För att bestämma stabiliteten så bestämmer vi systemets poler och nollställena och får då börja med att teckna överföringsfunktionen i z-planet och vi får

$$H(z) = \frac{1 - 0,3 \cdot z^{-1} - 1,08 \cdot z^{-2}}{1 + 1,06 \cdot z^{-1} + 0,81 \cdot z^{-2}} = \frac{z^2 - 0,3 \cdot z - 1,08}{z^2 + 1,06 \cdot z + 0,81}$$

Vi bestämmer nollställena

$$z^2 - 0,3 \cdot z - 1,08 = 0$$

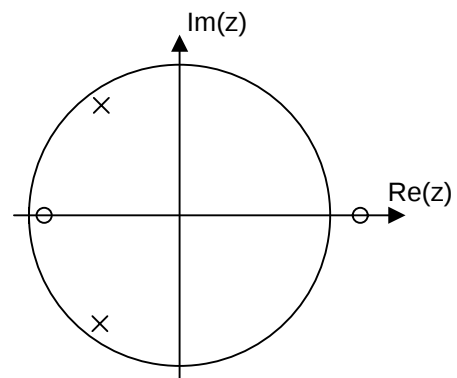
$$z_{n1,2} = 0,15 \pm \sqrt{0,15^2 + 1,08} = 0,15 \pm 1,05 = \begin{cases} 1,2 \\ -0,9 \end{cases}$$

Och polerna

$$z^2 + 1,06 \cdot z + 0,81 = 0$$

$$z_{p1,2} = -0,53 \pm \sqrt{0,53^2 - 0,81} = -0,53 \pm j \cdot 0,727 = 0,9 \angle \pm 126^\circ = 0,9 \angle \pm 0,7 \cdot \pi \text{ rad}$$

Vi ser i *Figur F2.1* att ett nollställe ligger innanför enhetscirkeln medan det andra ligger utanför enhetscirkeln. Båda polerna ligger innanför enhetscirkeln. Villkoret för stabilitet är att alla poler ligger innanför enhetscirkeln dvs vårt system är stabilt.



Figur F2.1 Pol/nollställesdiagram

- b) Vi bestämmer beloppet genom att beräkna överföringsfunktionen för verkliga frekvenser, dvs på enhetscirkeln. Detta blir ganska omfattande om vi skall göra det noggrant. Vi gör det lite enklare genom att beräkna beloppet för bara några frekvenser. Det är enkelt att beräkna för $z=1$, -1 och j dvs vid frekvenserna 0 Hz , $f_s/4$ och $f_s/2$. Vi ser också att det händer mycket med beloppet då vi passerar polen så vi beräknar beloppet för denna frekvens, dvs $z=1 \angle 0,7 \cdot \pi$. Vi får

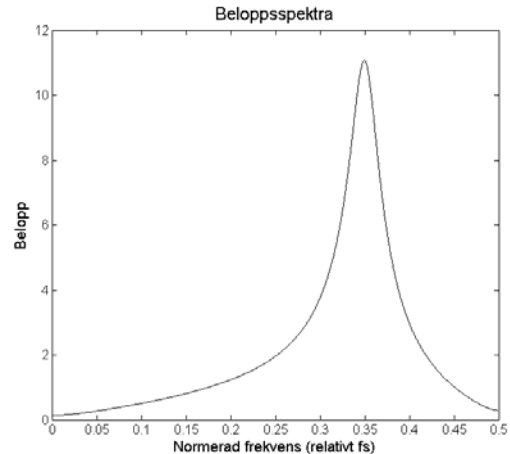
$$|H(1)| = \left| \frac{1^2 - 0,3 \cdot 1 - 1,08}{1^2 + 1,06 \cdot 1 + 0,81} \right| = 0,1324$$

$$|H(-1)| = \left| \frac{(-1)^2 - 0,3 \cdot (-1) - 1,08}{(-1)^2 + 1,06 \cdot (-1) + 0,81} \right| = 0,2933$$

$$|H(j)| = \left| \frac{j^2 - 0,3 \cdot j - 1,08}{j^2 + 1,06 \cdot j + 0,81} \right| = 1,9515$$

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{(e^{j\omega \cdot 0,7 \cdot \pi})^2 - 0,3 \cdot (e^{j\omega \cdot 0,7 \cdot \pi}) - 1,08}{(e^{j\omega \cdot 0,7 \cdot \pi})^2 + 1,06 \cdot (e^{j\omega \cdot 0,7 \cdot \pi}) + 0,81} \right| = 11,0624$$

Vi ritar beloppsspektra



Figur F2.2 Beloppsspektra

c) Vi använder tabell för att bestämma utsignalen

	1	-0,3	-1,08	-0,81	-1,06	
n	$x[n]$	$x[n-1]$	$x[n-2]$	$y[n-2]$	$y[n-1]$	$y[n]$
-1	0	0	0	0	0	0
0	0,5	0	0	0	0	0,5
1	0,3	0,5	0	0	0,5	-0,38
2	-0,2	0,3	0,5	0,5	-0,38	-0,8322
3	0,9	-0,2	0,3	-0,38	-0,8322	1,8259
4	-0,4	0,9	-0,2	-0,8322	1,8259	-1,7154
5	0	-0,4	0,9	1,8259	-1,7154	-0,5127

Tabell F2.1 Systemets utsignal

-
3. Vi vill använda fourierserien för att skapa den tidsföljd som genererar signalen som är den tidsdiskreta motsvarigheten till signalen

$$x(t) = \sin(2 \pi \cdot 200 \cdot t) - 1,4 \cdot \cos(2 \pi \cdot 500 \cdot t) + 0,8 \cdot \cos(2 \pi \cdot 4700 \cdot t)$$

Bestäm fourierseriekoefficienterna a_k och nödvändigt antal punkter i tidsföljden om samplingsfrekvensen är 32 kHz

(4 poäng)

Enligt fouriersserien så kan en periodisk signal beskrivas av uttrycket

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{j \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot n}{N}}$$

Där N är det antal punkter som behövs för att beskriva en period hos signalen och k anger de enskilda frekvenskomponenterna som måste vara heltalsmultiplar av en grundfrekvens som ges av upplösningen $\Delta = \frac{f_s}{N}$.

Vi får börja med att sampla signalen och bestämma nödvändigt antal punkter för en period av signalen för att sedan bestämma de ingående komponenterna.

Vi samplar signalen

$$x(t) = \sin(2 \pi \cdot 200 \cdot t) - 1,4 \cdot \cos(2 \pi \cdot 500 \cdot t) + 0,8 \cdot \cos(2 \pi \cdot 4700 \cdot t) \rightarrow$$

$$\rightarrow x[n] = \sin(2 \pi \cdot 200 \cdot n \cdot T) - 1,4 \cdot \cos(2 \pi \cdot 500 \cdot n \cdot T) + 0,8 \cdot \cos(2 \pi \cdot 4700 \cdot n \cdot T) =$$

$$= \sin\left(2 \pi \cdot \frac{200 \cdot n}{f_s}\right) - 1,4 \cdot \cos\left(2 \pi \cdot \frac{500 \cdot n}{f_s}\right) + 0,8 \cdot \cos\left(2 \pi \cdot \frac{4700 \cdot n}{f_s}\right) =$$

$$= \sin\left(2 \pi \cdot \frac{200 \cdot n}{32000}\right) - 1,4 \cdot \cos\left(2 \pi \cdot \frac{500 \cdot n}{32000}\right) + 0,8 \cdot \cos\left(2 \pi \cdot \frac{4700 \cdot n}{32000}\right) =$$

$$= \sin\left(2 \pi \cdot \frac{n}{160}\right) - 1,4 \cdot \cos\left(2 \pi \cdot \frac{n}{64}\right) + 0,8 \cdot \cos\left(2 \pi \cdot \frac{47 \cdot n}{320}\right) =$$

$$= \sin\left(2 \pi \cdot \frac{k_A \cdot n}{N}\right) - 1,4 \cdot \cos\left(2 \pi \cdot \frac{k_B \cdot n}{N}\right) + 0,8 \cdot \cos\left(2 \pi \cdot \frac{k_C \cdot n}{N}\right)$$

Vi måste nu hitta de minsta heltalsvärden på k_A , k_B , k_C och N som kan uppfylla detta. Vi ser att den sista termen har en nämnare som är en heltalsmultipl av de båda andra nämnarna så den borde vara en bra lösning. Låt oss se

$$x[n] = \sin\left(2 \pi \cdot \frac{2 \cdot n}{320}\right) - 1,4 \cdot \cos\left(2 \pi \cdot \frac{5 \cdot n}{320}\right) + 0,8 \cdot \cos\left(2 \pi \cdot \frac{47 \cdot n}{320}\right)$$

Vi har alltså hittat en lösning med 320 punkter. Låt oss skriva om uttrycket med Euler så att vi kan identifiera mot vårt fouriersserieuttryck

$$x[n] = \frac{e^{j \cdot 2 \pi \cdot \frac{2 \cdot n}{320}} - e^{-j \cdot 2 \pi \cdot \frac{2 \cdot n}{320}}}{2 \cdot j} - 1,4 \cdot \frac{e^{j \cdot 2 \pi \cdot \frac{5 \cdot n}{320}} + e^{-j \cdot 2 \pi \cdot \frac{5 \cdot n}{320}}}{2} + 0,8 \cdot \frac{e^{j \cdot 2 \pi \cdot \frac{47 \cdot n}{320}} + e^{-j \cdot 2 \pi \cdot \frac{47 \cdot n}{320}}}{2}$$

Vi ser att uttrycket innehåller termer som är snarlika de önskade men vi har en del termer med negativt index som inte finns i fouriersserieuttrycket. Vi vet dock att det tidsdiskreta spektrat är cykliskt, dvs vi kan ersätta negativa värden på k med $N+k$ och index -2 ersätts av $320-2=318$, index -5 ersätts av $320-5=315$ och index -47 ersätts av $320-47=273$ och vi får om vi stuvor om termerna

$$x[n] = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot e^{j \cdot 2 \pi \cdot \frac{2 \cdot n}{320}} - 0,7 \cdot e^{j \cdot 2 \pi \cdot \frac{5 \cdot n}{320}} + 0,4 \cdot e^{j \cdot 2 \pi \cdot \frac{47 \cdot n}{320}} + \\ + 0,4 \cdot e^{j \cdot 2 \pi \cdot \frac{273 \cdot n}{320}} - 0,7 \cdot e^{j \cdot 2 \pi \cdot \frac{315 \cdot n}{320}} - \frac{1}{2 \cdot j} \cdot e^{j \cdot 2 \pi \cdot \frac{318 \cdot n}{320}}$$

Och vi kan identifiera våra fouriersseriekoefficienter

$$a_2 = \frac{1}{2 \cdot j} = -0,5 \cdot j \quad a_5 = -0,7 \quad a_{47} = 0,4$$

$$a_{273} = 0,4 \quad a_{315} = -0,7 \quad a_{318} = -\frac{1}{2 \cdot j} = 0,5 \cdot j$$

4. Fouriersserien och fouriertransformen har snarlika egenskaper. Under vilka förutsättningar använder vi den ena eller den andra. Vilka skillnader får vi mellan de frekvensspektra som de två metoderna skapar?

(2 poäng)

Fouriersserien används för periodiska signaler och ger som resultat ett frekvensspektra med diskreta frekvenskomponenter som är lika många som det antal sampel som krävs för att sampla en period av signalen.

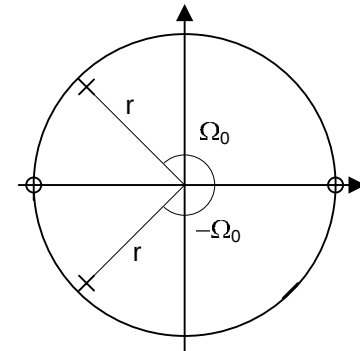
Fouriertransformen används för aperiodiska, icke-periodiska signaler och förutsätter ett oändligt antal sampel vilket i praktiken naturligtvis är omöjligt varför transformen egentligen inte används för att analysera signaler utan för att till exempel analysera systemegenskaper. Fouriertransformen ger ett kontinuerligt frekvensspektra

5. I en relativt lågkvalitativ digital överföring översänds både tal och en synkroniseringston med frekvensen 500 Hz via samma kanal. I mottagarändan separeras talet och tonen genom att använda ett notchfilter respektive ett bandpassfilter. Båda filtren skall ha passbandsförstärkningen ett (1) och använda bandbredden 10 Hz. Samplingsfrekvensen är 8 kHz. Dimensionera det filter som filtrerar fram synkroniseringstonen

(4 poäng)

Vi skall skapa två parallella filter, ett bandpassfilter för att ta fram synkroniseringstonen och ett notchfilter för att ta fram talet. Vi skapar det smala bandpassfiltret som tar fram synkroniseringstonen genom att placera en pol nära enhetscirkeln vid den vinkel som motsvarar den aktuella frekvensen

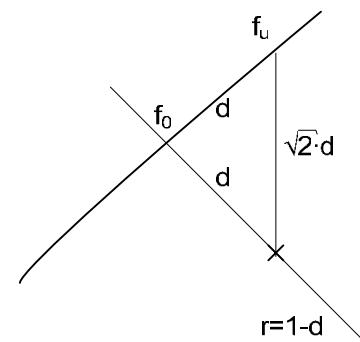
$$\Omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_0}{f_s} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{500}{8000} = \frac{\pi}{8}$$



Figur F5.1 Smalt bandpassfilter

För att få reella koefficienter i vår differensekvation så måste vi dessutom ha en komplexkonjugat pol. Systemet bör lämpligen ha lika många nollställen som poler så vi inför även två nollställen. För att få bra utsläckning så placerar vi dessa vid frekvenserna noll (0) och $f_s/2$ och vi får Figur F5.1.

Polens radie ges ur ett grafiskt resonemang som vi kan få ur Figur F5.2. Vid gränsfrekvensen så skall



Figur F5.2 Detaljbild

förstärkningen ha sjunkit med $\sqrt{2}$ vilket ger att avståndet från polen till enhetscirkeln måste vara lika långt som den sträcka efter enhetscirkeln som motsvarar halva bandbredden och då cirkeln har radien ett (1) så är detta samma sak som $\Omega_B/2$, där

$$\Omega_B = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_B}{f_s} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{10}{8000} = \frac{\pi}{400}$$

dvs vi har radien

$$r = 1 - \frac{\Omega_B}{2} = 1 - \frac{\pi}{800} = 0,996$$

Vi får uttrycket

$$H_{BP}(z) = A \cdot \frac{(z-1) \cdot (z+1)}{(z - r \cdot e^{j \cdot \Omega_0}) \cdot (z - r \cdot e^{-j \cdot \Omega_0})} = A \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2 - z \cdot r \cdot (e^{j \cdot \Omega_0} + e^{-j \cdot \Omega_0}) + r^2} =$$

$$= A \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2 - z \cdot 2 \cdot r \cdot \cos(\Omega_0) + r^2} = A \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2 - 1,841 \cdot z + 0,992}$$

För att få passbandsförstärkningen ett (1) så får vi bestämma förstärkningen vid filtrets mittfrekvens och kompensera för denna

$$|H(\Omega_0)| = \left| A \cdot \frac{(e^{j \cdot \Omega_0})^2 - 1}{(e^{j \cdot \Omega_0})^2 - 1,841 \cdot e^{j \cdot \Omega_0} + 0,992} \right| = \left| A \cdot \frac{e^{j \cdot \frac{\pi}{4}} - 1}{e^{j \cdot \frac{\pi}{4}} - 1,841 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{8}} + 0,992} \right| =$$

$$= A \cdot \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 + j \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1,841 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 0,992 + j \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1,841 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)} \right| = 255,1 \cdot A$$

Dvs vi får dämpa 255,1 gånger och får

$$A = \frac{1}{255,1} = 0,0039$$

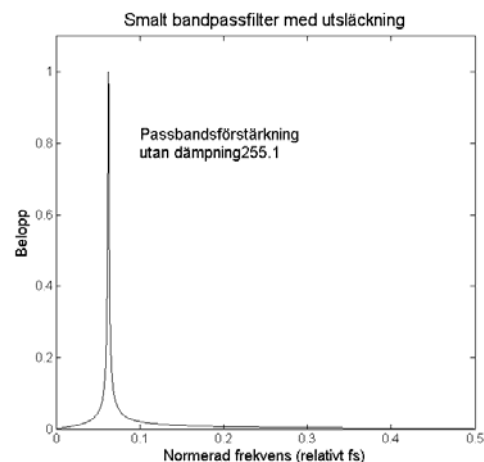
Dvs

$$H(z) = 0,0039 \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2 - 1,841 \cdot z + 0,992}$$

som ger differensekvationen

$$y[n] = 0,0039 \cdot x[n] - 0,0039 \cdot x[n-2] +$$

$$+ 1,841 \cdot y[n-1] - 0,992 \cdot y[n-2]$$



Figur F5.3 Beloppspektra smalt bandpass

6. Använd bilinjär transform för att bestämma differensekvationen för det tidsdiskreta filter som uppför sig som det analoga filtret med nedanstående överföringsfunktion. Samplingsfrekvensen är 48 kHz

$$H(\omega) = \frac{j \cdot \omega \cdot 1,5}{5 \cdot 10^3 \cdot \pi - \frac{5 \cdot 10^{-5}}{\pi} \cdot \omega^2 + j \cdot \omega}$$

(5 poäng)

Vi får börja med att skriva om uttrycket så att vi kan identifiera det mot någon standardform. Förstgradsuttryck i täljaren och andragsuttryck i nämnaren antyder direkt någon form av bandpassfilter och vi kan prova att skriva om mot standardformen för ett andrags bandpassfilter med överföringsfunktionen

$$H(\omega) = H_{PB} \cdot \frac{\frac{j \cdot \omega}{Q \cdot \omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j \cdot \omega}{Q \cdot \omega_0}}$$

Låt oss alltså formulera om filteruttrycket

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{j \cdot \omega \cdot 1,5}{5 \cdot 10^3 \cdot \pi - \frac{5 \cdot 10^{-5}}{\pi} \cdot \omega^2 + j \cdot \omega} = \frac{\frac{j \cdot \omega \cdot 1,5}{5 \cdot 10^3 \cdot \pi}}{1 - \frac{\omega^2}{10^8 \cdot \pi^2} + \frac{j \cdot \omega}{5 \cdot 10^3 \cdot \pi}} = \\ &= \frac{\frac{j \cdot \omega \cdot 1,5}{0,5 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot \pi}}{1 - \left(\frac{\omega}{5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot \pi}\right)^2 + \frac{j \cdot \omega}{0,5 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot \pi}} \end{aligned}$$

Vi identifierar

$$\begin{cases} f_0 = 5 \text{ kHz} \\ Q = 0,5 \\ H_{PB} = 1,5 \end{cases}$$

Övergången till tidsdiskret system sker nu via

$$\begin{cases} j \cdot \omega \rightarrow \frac{z-1}{z+1} \\ \omega_0 \rightarrow \tan\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) \end{cases}$$

Vi har

$$\Omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_0}{f_s} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{5000}{48000} = \frac{10 \cdot \pi}{48} \rightarrow \tan\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) = \tan\left(\frac{5 \cdot \pi}{48}\right) = 0,3395 = A$$

Och får

$$H(\omega) = H_{PB} \cdot \frac{\frac{j \cdot \omega}{Q \cdot \omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j \cdot \omega}{Q \cdot \omega_0}} = H_{PB} \cdot \frac{\frac{j \cdot \omega}{Q \cdot \omega_0}}{1 + \left(\frac{j \cdot \omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j \cdot \omega}{Q \cdot \omega_0}} \rightarrow$$

$$\rightarrow H(z) = H_{PB} \cdot \frac{\frac{1}{Q \cdot A} \cdot \frac{z-1}{z+1}}{1 + \left(\frac{1}{A} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \frac{1}{Q \cdot A} \cdot \frac{z-1}{z+1}} =$$

$$\rightarrow H(z) = H_{PB} \cdot \frac{\frac{1}{Q \cdot A} \cdot (z-1) \cdot (z+1)}{(z+1)^2 + \frac{1}{A^2} \cdot (z-1)^2 + \frac{1}{Q \cdot A} \cdot (z-1) \cdot (z+1)} =$$

$$= H_{PB} \cdot \frac{\frac{1}{Q \cdot A} \cdot (z^2 - 1)}{z^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{Q \cdot A} + \frac{1}{A^2}\right) + 2 \cdot z \cdot \left(1 - \frac{1}{A^2}\right) + 1 - \frac{1}{Q \cdot A} + \frac{1}{A^2}} =$$

$$= \frac{H_{PB}}{Q \cdot A \cdot \left(1 + \frac{1}{Q \cdot A} + \frac{1}{A^2}\right)} \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2 + 2 \cdot z \cdot \frac{1 - \frac{1}{A^2}}{1 + \frac{1}{Q \cdot A} + \frac{1}{A^2}} + \frac{1 - \frac{1}{Q \cdot A} + \frac{1}{A^2}}{1 + \frac{1}{Q \cdot A} + \frac{1}{A^2}}} =$$

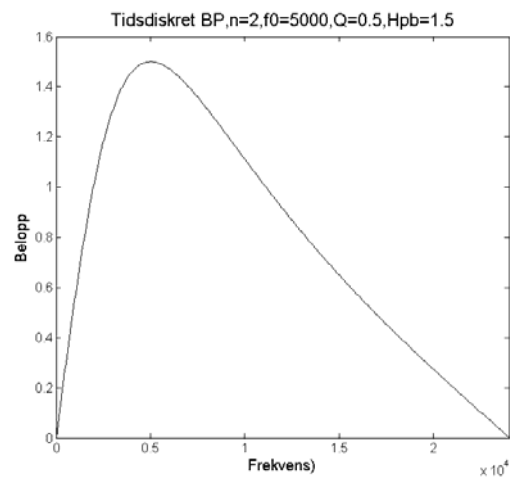
$$= \frac{H_{PB}}{Q \cdot A \cdot \left(1 + \frac{1}{Q \cdot A} + \frac{1}{A^2}\right)} \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2 + 2 \cdot z \cdot \frac{1 - \frac{1}{A^2}}{1 + \frac{1}{Q \cdot A} + \frac{1}{A^2}} + \frac{1 - \frac{1}{Q \cdot A} + \frac{1}{A^2}}{1 + \frac{1}{Q \cdot A} + \frac{1}{A^2}}} =$$

$$= 0,5676 \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2 - 0,9863 \cdot z + 0,2432}$$

Vilket ger differenskvationen

$$y[n] = 0,5676 \cdot x[n] - 0,5676 \cdot x[n-2] +$$

$$+ 0,9863 \cdot y[n-1] - 0,2432 \cdot y[n-2]$$



Figur F6 Beloppspektra bandpassfilter

Transformationer mellan s- och z-plan

$$j \cdot \omega \rightarrow \frac{z-1}{z+1} \quad \omega \rightarrow \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad \frac{K}{s-p} \rightarrow \frac{K}{1-e^{p \cdot T} \cdot z^{-1}}$$

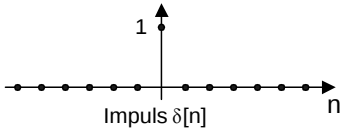
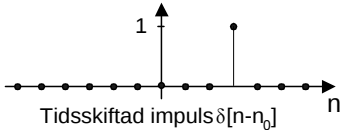
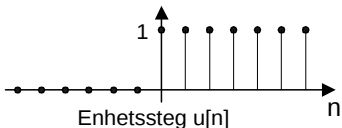
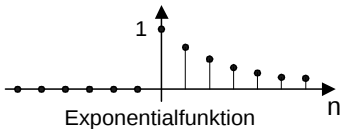
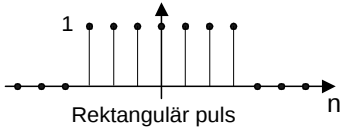
Tabell 4.4 Den diskreta fourierseriens egenskaper

Egenskap eller operation	Periodisk signal	Diskret fourierserie
Transform	$x[n]$	$a_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot n}{N}}$
Invers transform	$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot n}{N}}$	a_k
Linjaritet	$A \cdot x_1[n] + B \cdot x_2[n]$	$A \cdot a_k + B \cdot b_k$
Tidsskift	$x[n - n_0]$	$a_k \cdot e^{-j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot n_0}{N}}$
Differentiering	$x[n] - x[n-1]$	$a_k \cdot \left(1 - e^{-j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N}}\right)$
Tidsintegration	$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad a_0 = 0$	$\frac{a_k}{1 - e^{-j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N}}}$
Faltning	$\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \cdot x_2[n-m]$	$N \cdot a_k \cdot b_k$
Modulation	$x_1[n] \cdot x_2[n]$	$\sum_{m=0}^{N-1} a_m \cdot b_{k-m}$
Reell tidsfunktion	$x[n]$	$a_k = a_{-k}^*$ $\text{Re}(a_k) = \text{Re}(a_{-k})$ $\text{Im}(a_k) = -\text{Im}(a_{-k})$

Tabell 4.5 Den tidsdiskreta fouriertransformens egenskaper

Egenskap eller operation	Aperiodisk signal	Diskret fouriertransform
Transform	$x[n]$	$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot n}$
Invers transform	$x[n] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{2 \cdot \pi} X(\Omega) \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot n} \cdot d\Omega$	$X(\Omega)$
Linearitet	$a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]$	$a \cdot X_1(\Omega) + b \cdot X_2(\Omega)$
Tidsskift	$x[n - n_0]$	$X(\Omega) \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot n_0}$
Differentiering	$x[n] - x[n - 1]$	$X(\Omega) \cdot \{1 - e^{-j \cdot \Omega}\}$
Faltning	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(\Omega) \cdot X_2(\Omega)$
Modulation	$x_1[n] \cdot x_2[n]$	$\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{2 \cdot \pi} X_1(\lambda) \cdot X_2(\Omega - \lambda) \cdot d\lambda$

Tabell 4.6 Transformpar för den tidsdiskreta fouriertransformen

Vågform	Aperiodisk signal $x[n]$	Spektrum $X(\Omega)$
 Impuls $\delta[n]$	$\delta[n]$	1
 Tidsskiftad impuls $\delta[n-n_0]$	$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\cdot\Omega\cdot n_0}$
 Enhetssteg $u[n]$	$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\cdot\Omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \cdot \delta(\Omega - 2\cdot\pi\cdot k)$
 Exponentialfunktion	$a^n \cdot u[n] \quad a < 1$	$\frac{1}{1-a\cdot e^{-j\cdot\Omega}}$
 Rektangulär puls	$x[n] = 1 \quad n \leq m$ $x[n] = 0 \quad n > m$	$\frac{\sin\left[\left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \Omega\right]}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$

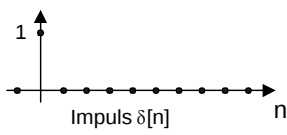
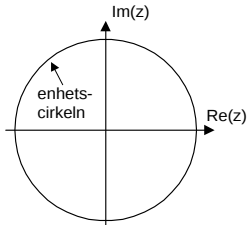
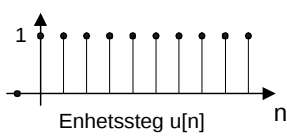
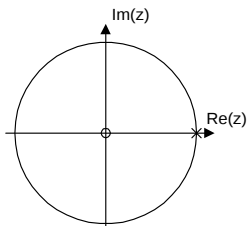
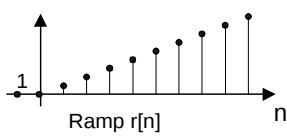
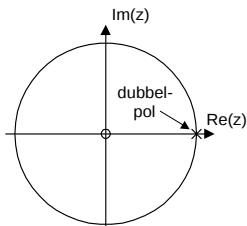
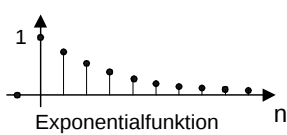
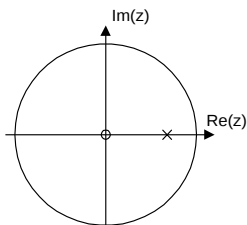
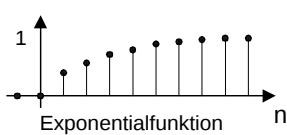
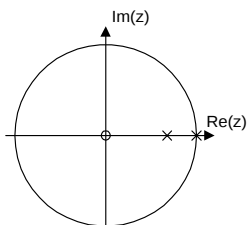
Tabell 4.7 Egenskaper hos den diskreta fouriertransformen (DFT)

Egenskap eller operation	Signal	DFT
Transform	$x[n]$	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{k \cdot n}$ $0 \leq k \leq N-1$
Invers transform	$x[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot W_N^{-k \cdot n}$ $0 \leq k \leq N-1$	$X[k]$
Linjaritet	$A \cdot x_1[n] + B \cdot x_2[n]$	$A \cdot X_1[k] + B \cdot X_2[k]$
Tidsskift	$x[n - n_0]$	$X[k] \cdot W_N^{k \cdot n_0}$
Faltning	$\sum_{m=0}^{N-1} x_1[n] \cdot x_2[m - n]$	$X_1[k] \cdot X_2[k]$
Modulation	$x_1[n] \cdot x_2[n]$	$\frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} X_1[m] \cdot X_2[k - m]$
Reell tidsfunktion	$x[n]$	$X[k] = X^*[-k]$ $\operatorname{Re}(X[k]) = \operatorname{Re}(X[-k])$ $\operatorname{Im}(X[k]) = -\operatorname{Im}(X[-k])$

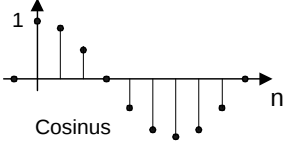
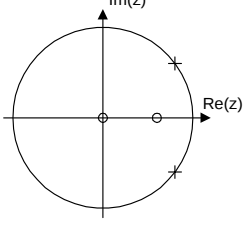
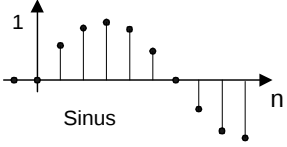
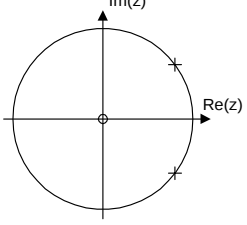
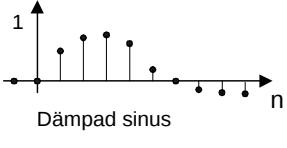
Tabell 5.1 z-transformens egenskaper

Egenskap eller operation	Signal	z-transform
Transform	$x[n]$	$\sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$
Invers transform	$x[n] = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \oint X(z) \cdot z^{n-1} \cdot dz$	$X(z)$
Linjaritet	$a_1 \cdot x_1[n] + a_2 \cdot x_2[n]$	$a_1 \cdot X_1(z) + a_2 \cdot X_2(z)$
Tidsskift	$x[n - n_0] \cdot u[n - n_0]$	$X(z) \cdot z^{-n_0}$
Differentiering	$x[n] - x[n - 1]$	$X(z) \cdot (1 - z^{-1})$
Tidsintegration	$\sum_{k=0}^n x[k]$	$X(z) \cdot \frac{z}{z - 1}$
Faltning	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$
Slutvärdesteorem	$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x[n]\}$	$\lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{z - 1}{z} \cdot X(z) \right\}$

Tabell 5.2 z-transformpar

Vågform	Signal $x[n]$	Spektrum $X(z)$	Nollställen och poler i z-planet
 Impuls $\delta[n]$	$\delta[n]$	1	 enhets-cirkeln
 Enhetssteg $u[n]$	$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$	
 Ramp $r[n]$	$r[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	 dubbel-pol
 Exponentialfunktion	$a^n \cdot u[n]$	$\frac{z}{z-a}$	
 Exponentialfunktion	$(1-a^n) \cdot u[n]$	$\frac{z \cdot (1-a)}{(z-a) \cdot (z-1)}$	

Tabell 5.2 fortsättning z-transformpar

Vågform	Signal $x[n]$	Spektrum $X(z)$	Nollställen och poler i z-planet
 Cosinus	$\cos(n \cdot \Omega_0) \cdot u[n]$	$\frac{z \cdot [z - \cos(\Omega_0)]}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\Omega_0) + 1}$	
 Sinus	$\sin(n \cdot \Omega_0) \cdot u[n]$	$\frac{z \cdot \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\Omega_0) + 1}$	
 Dämpad sinus	$a^n \cdot \sin(n \cdot \Omega_0) \cdot u[n]$	$\frac{a \cdot z \cdot \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2 \cdot a \cdot z \cdot \cos(\Omega_0) + a^2}$	