Une nouvelle caractérisation élémentaire de la dimension de Krull

Thierry Coquand (*) Henri Lombardi (†), Marie-Françoise Roy (‡),

30 janvier 2003

Résumé

Nous donnons une nouvelle caractérisation élémentaire de la dimension de Krull des treillis distributifs et des anneaux commutatifs. L'intuition géométrique est la suivante. Une variété est de dimension $\leq k$ si et seulement si toute sous variété a un bord de dimension $\leq k-1$. Puisque notre résultat est valable pour les treillis distributifs il s'applique dans toutes les situations algébriques courantes, où l'on a un espace spectral défini comme le spectre d'un treillis distributif.

MSC 2000 : 13C15, 03F65, 13A15, 13E05

Mots clés : Dimension de Krull, Bord d'une sous-variété, Mathématiques constructives.

Key words : Krull dimension, Boundary of a subvariety, Constructive Mathematics.

1 Les deux bords d'un point dans un treillis distributif

Soit un treillis distributif T. Nous notons $\vdash$ ou $\vdash_T$ la relation implicative de T définie sur l'ensemble $\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(T)$ des parties fines de T par :

$$A \vdash_T B \quad \iff \quad \bigwedge A \leq \bigvee B$$

Cette relation vérifie les axiomes suivants, dans lesquels on écrit x pour $\{x\}$ et A, B pour $A \cup B$.

$$\begin{array}{rcrcll} & & a & \vdash & a & (R) \\ A \vdash B & \Longrightarrow & A, A' & \vdash & B, B' & (M) \\ (A, x \vdash B)\ \&\ (A \vdash B, x) & \Longrightarrow & A & \vdash & B & (T) \end{array}$$

on dit que la relation est réflexive, monotone et transitive. La troisième règle (transitivité) s'appelle aussi la règle de coupure.

Un idéal I est soumis aux contraintes suivantes :

$$\begin{array}{rcl} & & 0 \in I \\ x, y \in I & \Longrightarrow & x \vee y \in I \\ x \in I,\ z \in T & \Longrightarrow & x \wedge z \in I \end{array}$$

* Chalmers, University of Göteborg, Sweden, email : coquand@cs.chalmers.se

† Equipe de Mathématiques, CNRS UMR 6623, UFR des Sciences et Techniques, Université de Franche-Comté, 25 030 BESANCON cedex, FRANCE, email : lombardi@math.univ-fcomte.fr

‡ IRMAR (UMR CNRS 6625), Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu 35042 Rennes cedex FRANCE, email : mfroy@maths.univ-rennes1.fr

(la dernière se réécrit $(x \in I,\ y \leq x) \Rightarrow y \in I$).

La notion duale de celle d'idéal est la notion de *filtre*. Un *idéal premier* I d'un treillis $T \neq \mathbf{1}$ est un idéal dont le complémentaire F est un filtre (qui est alors un *filtre premier*).

La dimension de Krull d'un treillis distributif est définie comme en algèbre commutative : c'est la borne supérieure des longueurs des chaînes strictement croissantes d'idéaux premiers.

Définition 1.1 *Pour un ensemble S arbitraire, une relation sur $\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(S)$ qui est réflexive, monotone et transitive est appelée une* relation implicative sur S *(en anglais :* entailment relation*).*

L'origine des relations implicatives se trouve dans le calcul des séquents de Gentzen, qui mit le premier l'accent sur la règle (T) (la coupure). Le théorème suivant (cf. [1]) est fondamental. Il dit que les trois axiomes des relations implicatives sont exactement ce qu'il faut pour que l'interprétation en forme de treillis distributif soit adéquate.

Théorème 1.2 (théorème fondamental des relations implicatives) *On considère un ensemble S avec une relation implicative $\vdash_S$ sur S. On considère le treillis distributif T défini par générateurs et relations comme suit : les générateurs sont les éléments de S et les relations sont les $A \ \vdash_T \ B$ chaque fois que $A \ \vdash_S \ B$. Alors pour toutes parties finies A et B de S on a $A \ \vdash_T \ B \implies A \ \vdash_S \ B$.*

Un treillis distributif T est appelé un *treillis implicatif* [3] ou une *algèbre de Heyting* [6] lorsqu'il existe une opération binaire $\rightarrow$ vérifiant pour tous a, b, c :

$$a \wedge b \leq c \iff a \leq b \rightarrow c\,,$$

auquel cas l'opération $\rightarrow$ est déterminée de manière unique par la structure du treillis. On définit alors la loi unaire $\neg x = x \rightarrow 0$.

Dans [2], en poursuivant la problématique de Joyal [7] et Español [4] est établi le théorème suivant, qui premet de donner une interprétation constructive élémentaire de la dimension de Krull :

Théorème 1.3 *Soit un treillis distributif T engendré par une partie S.*

(1) *T est de dimension $\leq \ell - 1$ si et seulement si il vérifie la condition suivante : pour tous $x_1, \ldots, x_\ell \in S$ il existe a_1, a_2,$\ldots a_\ell$ vérifiant :*

$$a_1 \wedge x_1 = 0\,,\ a_2 \wedge x_2 \leq a_1 \vee x_1\,, \ldots,\ a_\ell \wedge x_\ell \leq a_{\ell-1} \vee x_{\ell-1}\,,\ 1 = a_\ell \vee x_\ell.$$

(2) *Supposons T implicatif : il est de dimension $\leq \ell - 1$ si et seulement si pour toute suite $x_1, \ldots, x_\ell$ dans S on a l'égalité*

$$1 = x_\ell \vee (x_\ell \rightarrow \ldots (x_2 \vee (x_2 \rightarrow (x_1 \vee \neg x_1))) \ldots)$$

En particulier un treillis implicatif est de dimension ≤ 0 si et seulement si on a l'identité $1 = x \vee \neg x$, c'est-à-dire si c'est une algèbre de Boole.

En fait l'intuition derrière ces identités a priori un peu mystérieuses est la suivante : une variété est de dimension $\leq k$ si et seulement si le bord de toute sous-variété est de dimension $\leq k - 1$.

Dans cette note nous donnons le formalisme algébrique correspondant à cette intuition et nous montrons qu'il redonne bien la dimension de Krull.

Définition 1.4 *Le bord de $x \in T$ dans le treillis distributif T est le treillis distributif $T_{\{x\}}$ engendré par l'ensemble T muni de la relation implicative $\vdash^x$ suivante*

$$A \vdash^x B \qquad \iff \qquad \exists y\ (\,x, y \vdash_T \quad \&\ \ A \vdash_T x, y, B\,)$$

Lorsque T est implicatif, cette définition se simplifie en $A \ \vdash_T \ x \vee \neg x, B$.

On vérifie sans peine que la relation $\vdash^x$ est une relation implicative et que le bord qu'elle définit est un treillis quotient du treillis initial.

La dimension de Krull peut donc être définie de manière inductive à partir de la dimension -1 (qui caractérise le treillis trivial, celui dans lequel $0 = 1$). Précisément on obtient :

Théorème 1.5 *Soit un treillis distributif T engendré par une partie S et k un entier ≥ 0. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *T est de dimension $\leq k$*
2. *Pour tout $x \in S$ le bord $T_{\{x\}}$ est de dimension $\leq k - 1$.*

En considérant le treillis dual, on définit de manière analogue un autre quotient de T, le bord ${}_{\{x\}}T$, engendré par l'ensemble T muni de la relation implicative ${}^x\!\vdash$ suivante :

$$A \;{}^x\!\vdash B \qquad \iff \qquad \exists y \,(\, \vdash_T \, x, y \quad \& \quad x, y, A \vdash_T \, B\,)$$

avec le théorème analogue à 1.5.

On peut reformuler le théorème précédent de la manière suivante [9, 5].

Théorème 1.6 *Un espace spectral X est de dimension $\leq k$ si et seulement si tout ouvert compact de X a un bord de dimension $\leq k - 1$.*

2 Les deux bords d'un point dans un anneau commutatif

Dans un anneau commutatif A, le *treillis de Zariski* $\mathrm{Zar}(A)$ a pour éléments les radicaux d'idéaux de type fini (la relation d'ordre est l'inclusion). Il est bien défini en tant que treillis. Autrement dit $\sqrt{I_1} = \sqrt{J_1}$ et $\sqrt{I_2} = \sqrt{J_2}$ impliquent $\sqrt{I_1 I_2} = \sqrt{J_1 J_2}$ (ceci définit $\sqrt{I_1} \wedge \sqrt{I_2}$) et $\sqrt{I_1 + I_2} = \sqrt{J_1 + J_2}$ (ceci définit $\sqrt{I_1} \vee \sqrt{I_2}$). Le treillis de Zariski de A est toujours un treillis distributif, mais en général l'égalité n'est pas testable. Nous notons $\widetilde{a}$ pour $\sqrt{\langle a \rangle}$.

Les idéaux premiers de l'anneau A et ceux du treillis distributif $\mathrm{Zar}(A)$ sont en correspondance naturelle bijective.

Soient U et J deux familles finies dans A, on a

$$U \;\vdash_{\mathrm{Zar}(A)}\; J \quad \iff \quad \prod_{u \in U} u \in \sqrt{\langle J \rangle} \quad \iff \quad \mathcal{M}(U) \cap \langle J \rangle \neq \emptyset$$

où $\mathcal{M}(U)$ est le monoïde multiplicatif engendré par U. Cela suffit à décrire ce treillis. Plus précisément on a [2] :

Proposition 2.1 *Le treillis $\mathrm{Zar}(A)$ est (à isomorphisme près) le treillis engendré par $(A, \vdash)$ où $\vdash$ est la plus petite relation implicative vérifiant*

$$0_A \;\vdash \quad ; \quad \vdash \; 1_A \quad ; \quad x + y \;\vdash\; x,\, y \quad ; \quad xy \;\vdash\; x \quad ; \quad x,\, y \;\vdash\; xy$$

Rappelons (cf. [2]) qu'une conséquence des considérations précédentes et du théorème 1.3 est que la dimension de Krull d'un anneau commutatif peut être caractérisée de manière élémentaire en termes d'identités algébriques (les identités en question avaient été mises à jour dans [8] par une méthode différente).

Nous pouvons donner aussi un analogue du théorème 1.5 (et de sa version duale) dans le cadre des anneaux commutatifs.

Définition 2.2 *Soit A un anneau commutatif et $x \in A$.*

(1) *Le bord $A_{\{x\}}$ de x dans A est l'anneau quotient $A/I^{\{x\}}$ où $I^{\{x\}}$ est l'idéal engendré par x et par les éléments y tels que xy soit nilpotent.*

(2) *Le bord ${}_{\{x\}}A$ de x dans A est l'anneau localisé $A_{S^{\{x\}}}$ où $S^{\{x\}}$ est le monoïde engendré par x et par les éléments de $1 + xA$.*

La proposition suivante est facile.

Proposition 2.3 *Soit $T = \mathrm{Zar}(A)$ et $x \in A$. Alors $T_{\{\widetilde{x}\}}$ s'identifie naturellement avec $\mathrm{Zar}(A_{\{x\}})$ et ${}_{\{\widetilde{x}\}}T$ s'identifie naturellement avec $\mathrm{Zar}({}_{\{x\}}A)$.*

Comme corollaire on obtient l'analogue suivant du théorème 1.5 et de son dual. Rappelons que la dimension de Krull d'un anneau est -1 si et seulement si l'anneau est trivial (i.e., $1_A = 0_A$).

Théorème 2.4 *Pour un anneau commutatif A et un entier $k \geq 0$ les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La dimension de Krull de A est $\leq k$.*
2. *Pour tout $x \in A$ la dimension de Krull de $A_{\{x\}}$ est $\leq k - 1$.*
3. *Pour tout $x \in A$ la dimension de Krull de ${}_{\{x\}}A$ est $\leq k - 1$.*

Ce théorème nous donne tout à la fois une bonne signification intuitive de la dimension de Krull, une caractérisation constructive élémentaire de cette dimension et un bon moyen de comprendre comment elle peut être caractérisée en terme d'identités algébriques comme dans [2, 8].

Exemples
Si $A = \mathbb{Z}$ et $n \neq 0, 1, -1$ alors $\mathbb{Z}_{\{n\}} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et ${}_{\{n\}}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ (deux anneaux zéro-dimensionnels). Et pour $n = 0, 1$ ou -1 les deux bords sont triviaux.

Soit $\mathbb{K}$ un corps contenu dans un corps algébriquement clos $\mathbb{L}$. Si $A = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]/J$, si V est la variété affine correspondante dans $\mathbb{L}^n$, si $f \in A$ définit une sous-variété W de V et si Y est le bord de W dans V, alors à l'anneau $A_{\{f\}}$ correspond la variété affine Y.

Références

[1] Cederquist J., Coquand T. *Entailment relations and Distributive Lattices* Logic Colloquium '98 (Prague), 127–139, Lect. Notes Log., 13. Assoc. Symbol. Logic, Urbana, (2000).

[2] Coquand T., Lombardi H. *Hidden constructions in abstract algebra (3) Krull dimension of distributive lattices and commutative rings.* dans : Commutative ring theory and applications. Eds : Fontana M., Kabbaj S.-E., Wiegand S. Lecture notes in pure and applied mathematics vol 131. M. Dekker. (2002) 477–499 .

[3] Curry, H. B. *Foundations of mathematical logic* McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-San Francisco, Calif.-Toronto-London 1963

[4] Español L. *Constructive Krull dimension of lattices.* Rev. Acad. Cienc. Zaragoza (2) **37** (1982), 5–9.

[5] Hochster M. *Prime ideal structure in commutative rings.* Trans. Amer. Math. Soc. **142** (1969) 43–60.

[6] Johnstone P. *Stone Spaces.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 3. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[7] Joyal A. *Le théorème de Chevalley-Tarski.* Cahiers de Topologie et Géometrie Differentielle, 1975.

[8] Lombardi H. *Dimension de Krull, Nullstellensätze et Évaluation dynamique.* Math. Zeitschrift, **242**, (2002), 23–46.

[9] Stone M.H. *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics.* Cas. Mat. Fys. **67**, (1937), 1-25.