1.13 Kripke-Modelle

Was soll als wahr gelten in der konstruktiven Logik? In der klassischen Logik postuliert man einen logisch allwissenden Gott, der zu jeder Aussage die Antwort “wahr” oder “falsch” kennt. In der konstruktiven Logik setzt man dagegen einen Erkenntnisbegriff ein: Das Wissen um die Wahrheit/Falschheit von Aussagen nimmt stetig zu, und idealerweise monoton, d.h. (im Gegensatz zur Geschichte) geht Wissen nie mehr verloren. Ist also eine Aussage zu einem Zeitpunkt als wahr erkannt, so auch in allen zukünftigen Zeitpunkten. Die Aussage $\neg A$ ist wahr, wenn A nie wahr werden kann, d.h. in allen Zukunften die Annahme von A zu Widersprüchen führt. Eine Implikation $A \Rightarrow C$ ist wahr, wenn die Annahme von A in allen Zukunften C erzwingt.

Die Aussage “wenn die Sonne scheint, regnet es nicht” wird also nicht nur dadurch wahr, dass die Sonne gerade nicht scheint oder es gerade nicht regnet (klass. Implikation), sondern es darf eben nie mehr regnen, wenn die Sonne scheint.

Diese Überlegungen führen zu folgender Interpretation von konstruktiver Aussagenlogik.

Ein Aussagenlogisches Kripke-Modell ist ein Tripel $(K, \leq, \Vdash)$ so dass

- K ist eine nicht-leere Menge von Welten,
- $\leq$ ist partielle Präordnung auf K (reflexiv, transitiv),
- $\Vdash$ ist eine Relation zwischen Welten und Aussagenvariablen, $k \Vdash P$ bedeuted “k erfüllt P”,
- die Erfüllungsrelation $\Vdash$ ist monoton, d.h.

$$k \Vdash P \quad \text{und} \quad k' \leq k \quad \text{implizieren} \quad k' \Vdash P.$$

Die Erfüllungsrelation wird wie folgt auf Aussagen erweitert:

- $k \Vdash \top$
- $k \Vdash A \wedge B$ gdw. $k \Vdash A$ und $k \Vdash B$
- $k \Vdash A \vee B$ gdw. $k \Vdash A$ oder $k \Vdash B$
- $k \Vdash A \Rightarrow B$ gdw. für alle $k' \leq k$, wenn $k' \Vdash A$, dann $k' \Vdash B$
- $k \nVdash \bot$

Übung 19 (Monotonie für beliebige Formeln) Zeigen Sie: Wenn $k' \leq k \Vdash A$, dann $k' \Vdash A$.

Das natürliche Schließen ist vollständig für Kripke-Modelle, d.h., gilt eine Aussage A in allen Modellen, so ist sie beweisbar. Unbeweisbarkeit kann man also durch Angabe eines Gegenmodells zeigen.

Beispiel 20 Gegenmodell zu $P \vee \neg P$: Nehme die Welten $K = \{\emptyset, \{P\}\}$ mit $k \Vdash P$ gdw. $P \in k$ und $k' \leq k$ gdw. $k' \supseteq k$. Dann $\emptyset \nVdash P \vee \neg P$, da $\emptyset \nVdash P$ und $\emptyset \nVdash P \Rightarrow \perp$. Letzteres gilt, weil es eine Zukunft $\{P\}$ von $\emptyset$ gibt so dass $\{P\} \Vdash P$ aber $\{P\} \nVdash \perp$.

Dasselbe Gegenmodell widerlegt die Pierce-Formel $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$.

$k \Vdash \Gamma$ gelte gdw. $k \Vdash A$ für alle $A \in \Gamma$.

Theorem 21 (Korrektheit des natürlichen Schließens) *Wenn* $\Gamma \vdash A$ *und* $k \Vdash \Gamma$*, dann* $k \Vdash A$*.*

Beweis. Durch Induktion über $\Gamma \vdash A$.

Fall

$$\frac{A \in \Gamma}{\Gamma \vdash A}$$

$k \Vdash A$ nach Def. von $k \Vdash \Gamma$.

Fall

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

Um $k \Vdash A \Rightarrow B$ zu zeigen, wähle beliebiges $k' \leq k$ mit $k' \Vdash A$ und zeige $k' \Vdash B$. Mit Monotonie gilt $k' \Vdash \Gamma$ also $k' \Vdash \Gamma, A$. Nach I.V. folgt sofort $k' \Vdash B$.

Fall

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

Nach I.V. gilt $k \Vdash A$ und $k \Vdash A \Rightarrow B$, und da $k \leq k$ also auch $k \Vdash B$.

Fall

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

Nach I.V. gilt $k \Vdash A \vee B$. Falls $k \Vdash A$, dann $k \Vdash \Gamma, A$ und nach I.V. $k \Vdash C$. Falls $k \Vdash B$, analog.

Fall

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash C}$$

Nach I.V. gilt $k \Vdash \perp$, ein Widerspruch. *Ex falsum sequitur quodlibet*, also $k \Vdash C$.

□

1.14 Vollständigkeit des natürlichen Schließens

Wir zeigen die Vollständigkeit durch Konstruktion eines universellen Modells. Wir beschränken uns auf das negative Fragment $P, \top, \wedge, \Rightarrow$, für die Behandlung von Disjunktionen braucht man entweder eine klassische Metalogik, oder Beth-Modelle, eine Erweiterung von Kripke-Modellen.

Als Welten nehmen wir Kontexte (Mengen von Formeln) und definieren unser Modell durch:

- $\Gamma \Vdash P$ gdw. $\Gamma \vdash P$.
- $\Gamma' \leq \Gamma$ gdw. $\Gamma' \supseteq \Gamma$.

Lemma 22 $\Gamma \vdash A$ *gdw.* $\Gamma \Vdash A$.

Beweis. Durch Induktion über A.

Fall $A = P$. Siehe Def. von $\Gamma \Vdash P$.

Fall $A = B \Rightarrow C$. "Dann:" Wir zeigen $\Gamma \Vdash B \Rightarrow C$, dazu sei $\Gamma' \leq \Gamma$ beliebig mit $\Gamma' \Vdash B$. Nach I.V. gilt $\Gamma \vdash B$, also mit $\Rightarrow\mathsf{E}$, $\Gamma \vdash C$. Wiederum nach I.V. gilt $\Gamma \Vdash C$. "Wenn:" Wir zeigen $\Gamma \vdash B \Rightarrow C$ durch $\Rightarrow\mathsf{I}$. Nach Vorraussetzung $\Gamma \Vdash B \Rightarrow C$ gilt $\Gamma, B \Vdash C$, da $\Gamma, B \leq \Gamma$ und $\Gamma, B \Vdash B$ (dies gilt nach I.V., da $\Gamma, B \vdash B$). Also gilt nach I.V. $\Gamma, B \vdash C$.

Fall $A = B \wedge C$. Einfach nach I.V., da $\Gamma \vdash B \wedge C$ gdw. $\Gamma \vdash B$ und $\Gamma \vdash C$, und ebenso für $\Gamma \Vdash B \wedge C$.

□

Korollar 23 $\Gamma \Vdash \Gamma$.

Theorem 24 (Vollständigkeit des natürlichen Schließens) *Es gelte für alle Modelle und alle Welten k: $k \Vdash \Gamma$ impliziert $k \Vdash A$. Dann $\Gamma \vdash A$.*

Beweis. Speziell gilt für das universelle Modell und $k = \Gamma$, dass $\Gamma \Vdash A$. Also $\Gamma \vdash A$ nach Lemma 22. □

Erweiterung auf volle Aussagenlogik. Der Beweis von Lemma 22 scheitert für Disjunktionen $A = B \vee C$. Wir haben $\Gamma \vdash B \vee C$ und müssen zeigen, dass $\Gamma \Vdash B$ oder $\Gamma \Vdash C$. Es kann aber sein, dass weder $\Gamma \vdash B$ noch $\Gamma \vdash C$ (z.B. $\Gamma = B \vee C$), also ist die I.V. nicht anwendbar. Die Idee ist, nun solche Kontexte Γ zuzulassen (wir nennen sie saturiert), die, falls $\Gamma \vdash B \vee C$, entweder $\Gamma \vdash B$ oder $\Gamma \vdash C$ erzwingen. Ähnliche Probleme ergeben sich für $A = \bot$. Hier kommen wir von $\Gamma \vdash \bot$ nicht weiter. Idee hier ist, nur konsistente Kontexte zuzulassen mit $\Gamma \nvdash \bot$.

Definition 25 Ein Kontext Γ heißt saturiert für D, falls

1. $\Gamma \not\vdash \bot$ (Γ ist konsistent), und

2. für alle Teilformeln $A \vee B$ von Γ, D mit $\Gamma \vdash A \vee B$ gilt $\Gamma \vdash A$ oder $\Gamma \vdash B$.

Lemma 26 (Saturierung) *(Sei C Teilformel von D.) Falls $\Gamma \not\vdash C$ so gibt es einen für D saturierten Kontext $\hat{\Gamma} \leq \Gamma$ mit $\hat{\Gamma} \not\vdash C$.*

Beweis. Da $\Gamma \not\vdash C$, ist Γ konsistent. Sei $(A_i \vee B_i)_{0 \leq i < n}$ eine Aufzählung aller Subformeln von Γ, D mit $\Gamma \vdash A_i \vee B_i$. Wir konstruieren eine Folge von konsistenten Kontexten Γ_i durch $\Gamma_0 = \Gamma$ und

$$\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i & \text{falls } \Gamma_i \vdash A_i \text{ oder } \Gamma_i \vdash B_i \\ \Gamma_i, A_i & \text{falls } \Gamma_i, A_i \not\vdash C \\ \Gamma_i, B_i & \text{falls } \Gamma_i, B_i \not\vdash C \end{cases}$$

Die Fallunterscheidung ist vollständig, da aus $\Gamma_i, A_i \vdash C$ und $\Gamma_i, B_i \vdash C$ mit $\vee\mathsf{E}$ $\Gamma \vdash C$ folgt, im Widerspruch zur Annahme.

Nun ist $\hat{\Gamma} = \Gamma_n$ der gesuchte Kontext. $\square$

Wir wollen nun die Vollständigkeit des natürlichen Schließens zeigen, also $\Gamma \vdash D$ falls für alle Modelle und Welten k gilt: $k \Vdash \Gamma$ implies $k \Vdash D$. Dazu betrachten wir ein universelles Modell, in dem eine Welt ein für D saturierter Kontext Γ ist. Erfüllung und Zukunft seien wie zuvor definiert.

Lemma 27 *Sei Γ saturiert für D und C eine Teilformel von Γ, D. Dann $\Gamma \vdash C$ gdw. $\Gamma \Vdash C$.*

Beweis. Induktion über C.

Fall $C = A \Rightarrow B$. "Dann:" Wir zeigen $\Gamma \Vdash B \Rightarrow C$, dazu sei $\Gamma' \leq \Gamma$ saturiert für D beliebig mit $\Gamma' \Vdash B$. Nach I.V. gilt $\Gamma \vdash B$, also mit $\Rightarrow\mathsf{E}$, $\Gamma \vdash C$. Wiederum nach I.V. gilt $\Gamma \Vdash C$. "Wenn:" Beweis durch Widerspruch. Sei $\Gamma \not\vdash A \Rightarrow B$. Dann auch $\Gamma, A \not\vdash B$. Nach Lemma 26 gibt es einen Kontext $\hat{\Gamma} \leq \Gamma, A$ saturiert für D mit $\hat{\Gamma} \not\vdash B$. Nach I.V. also $\hat{\Gamma} \not\Vdash B$. Wegen $\hat{\Gamma} \leq \Gamma, A \vdash A$ gilt aber $\hat{\Gamma} \Vdash A$ und damit $\hat{\Gamma} \Vdash B$. Widerspruch!

Fall $C = A \vee B$. "Dann:" Es gilt $\Gamma \vdash A \vee B$. Da $A \vee B$ Teilformel von Γ, D und Γ saturiert für D, gilt entweder $\Gamma \vdash A$ oder $\Gamma \vdash B$, nach I.V. also $\Gamma \Vdash A$ oder $\Gamma \Vdash B$. "Wenn:" Im Falle $\Gamma \Vdash A$ gilt nach I.V. $\Gamma \vdash A$, also $\Gamma \vdash A \vee B$. Rest analog.

Fall $C = \bot$. $\Gamma \Vdash \bot$ und $\Gamma \vdash \bot$ sind beide falsch, da Γ konsistent.

$\square$

Theorem 28 (Vollständigkeit des natürlichen Schließens) *Es gelte für alle Modelle und alle Welten k: $k \Vdash \Gamma$ impliziert $k \Vdash D$. Dann $\Gamma \vdash D$.*

Beweis. Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass $\Gamma \not\vdash D$. Dann gibt es nach Lemma 26 ein $\hat{\Gamma} \leq \Gamma$ saturiert für D mit $\hat{\Gamma} \not\vdash D$. Nach Lemma 27 also $\hat{\Gamma} \not\Vdash D$. Allerdings gilt $\hat{\Gamma} \vdash \Gamma$ und damit wiederum nach Lemma 27 $\hat{\Gamma} \Vdash \Gamma$. Für das universelle Modell der für D saturierten Kontexte gilt also nach Annahme $\hat{\Gamma} \Vdash D$, ein Widerspruch! □

1.15 Curry-Howard-Isomorphismus und einfach getypter Lambda-Kalkül

Nach der Brower-Heyting-Kolmogorov-Interpretation sind Beweise Objekte (z.B. Paare) oder Rechenverfahren (z.B. Beweis der Implikation). 1958 entdeckte Haskell Curry die Übereinstimmung von Beweisen im Hilbert-Kalkül mit Termen partiell kombinatorischer Algebren (ein Berechnungsmodell). 1969 stellte William Howard fest, dass Beweise im Kalkül des natürlichen Schliessens mit λ-Termen übereinstimmen (ein weiteres Berechnungsmodell). Der Typ eines Terms entspricht der Aussage, die dieser Term beweist.

Aussage	Typ
Konjunktion $A \wedge B$	kartesisches Produkt $\sigma \times \tau$
Disjunktion $A \vee B$	disjunkte Summe $\sigma + \tau$
Implikation $A \Rightarrow B$	Funktionsraum $\sigma \to \tau$
Trivialität $\top$	einelementiger Typ 1
Absurdität $\perp$	leerer Typ 0

Die Regeln für natürliches Schließen mit Beweistermen kann man also eins-zu-eins in Typisierungsregeln für λ-Terme übertragen. Im folgenden trennen wir strikt zwischen *freien Variablen* $a, b, c \ldots$, auch *Parameter* oder *neue Konstantensymbole* genannt, und *gebundenen Variablen* $x, y, z \ldots$. Ein Typisierungskontext Γ bindet Parameter an Typen.

Typisierungsregeln für Parameter und Funktionen:

$$\frac{(a{:}\tau) \in \Gamma}{\Gamma \vdash a : \tau} \qquad \frac{\Gamma, a{:}\sigma \vdash t[a/x] : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x t : \sigma \to \tau}\ a \text{ neu} \qquad \frac{\Gamma \vdash r : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash s : \sigma}{\Gamma \vdash r\, s : \tau}$$

In der Typisierungsregel für $\lambda x t$ muss a ein neuer Parameter sein, der noch nicht in Γ deklariert ist.

Der Wert (d.h., das Ergebnis) eines Programmes wird berechnet, in dem man alle *Reduktionen* durchführt, die Möglich sind. Reduktion von Termen haben wir schon unter dem Begriff *Beweisreduktion* kennengelernt. Bsp.:

$$(\lambda x t)\, s \quad \longrightarrow \quad t[s/x]$$

Übung 29 (Programmieren im λ-Kalkül) Schreiben Sie Programme, deren Typen wie folgt vorgegeben sind.

1. $\mathsf{id} : \tau \to \tau$.
2. $\mathsf{curry} : (\sigma \times \sigma' \to \tau) \to \sigma \to \sigma' \to \tau$.
3. $\mathsf{uncurry} : (\sigma \to \sigma' \to \tau) \to \sigma \times \sigma' \to \tau$.
4. $\mathsf{comp} : (\tau_2 \to \tau_3) \to (\tau_1 \to \tau_2) \to \tau_1 \to \tau_3$.

Zeigen Sie, dass $\mathsf{comp}\mathsf{curry}\mathsf{uncurry} \longrightarrow^+ \lambda f \lambda x \lambda y.\, f\, x\, y$.