Institut für Informatik
der Universität München
Prof. M. Hofmann
A. Abel

WS 2005/2006

12. Dezember 2005

Übungen zur Vorlesung
Rechnergestütztes Beweisen

Blatt 8

Aufgabe 19: [Papier, 6 Punkte] Die Theorie der linearen Arithmetik über $\mathbb{Q}$ ist gegeben durch die Addition $+$ und Konstante 1 sowie ein einstelliges Funktionssymbol f_q für jedes $q \in \mathbb{Q}$, das als Multiplikation $x \mapsto q \cdot x$ interpretiert wird. Sie ist definiert als die Menge aller im kanonischen Modell $\mathbb{Q}$ wahren Gleichungen.

Zeigen Sie, dass diese Theorie konvex ist:

1. Beweisen Sie zuerst: $\forall\vec{x}.\, r = s \vee t = u$ impliziert $\forall\vec{x}.\, r = s$ oder $\forall\vec{x}.\, t = u$. [Hinweis: Betrachten Sie die in der Vorlesung gegebene Normalform von Gleichungen.]
2. Beweisen nun allgemein: $\forall\vec{x}.\,(E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) \Rightarrow (E'_1 \vee \ldots E'_m)$ impliziert $\forall\vec{x}.\,(E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) \Rightarrow E'_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Aufgabe 20: [Papier, 6 Punkte] Es sei $\mathcal{T}$ die Menge aller *Gleichungen* in der Sprache mit Konstanten `true:bool`, `false:bool` und einem dreistelligen Funktionssymbol `if _ then _ else _` : $[\mathtt{bool}^3 \to \mathtt{bool}]$, die in der Standardinterpretation mit $[\![\mathtt{bool}]\!] = \{0, 1\}$ wahr sind. Gilt die Aussage

$$\mathcal{T} \models f(x) = x, f(\mathtt{true}) = \mathtt{false} \Longrightarrow x = \mathtt{false}$$

wobei f ein uninterpretiertes Funktionssymbol ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 21: [Papier, 8 Punkte] Sei $\mathcal{T}$ die (lösbare) Theorie der Paare und Projektionen über dem Grundtyp `bool` der Booleans. Gegeben seien die uninterpretierten Funktionssymbole $v, u, z : \mathtt{bool}$, $x, y : \mathtt{bool{*}bool}$ und $f : [\mathtt{bool{*}bool} \to \mathtt{bool}]$. Betrachten Sie folgendes Problem:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} & \models & f(\langle y.2, x.2\rangle) = v \wedge f(\langle x.1, y.1\rangle) = u \\ & & \wedge\, (\mathtt{if}\ u\ \mathtt{then}\ x.1\ \mathtt{else}\ x.2) = y.1 \wedge (\mathtt{if}\ z\ \mathtt{then}\ x.1\ \mathtt{else}\ x.2) = y.2 \\ & & \wedge\, z = (\mathtt{if}\ z\ \mathtt{then}\ z\ \mathtt{else}\ u) \wedge u = (\mathtt{if}\ z\ \mathtt{then}\ \mathtt{false}\ \mathtt{else}\ \mathtt{true}) \\ & & \Rightarrow v = \mathtt{false}. \end{array}$$

1. Entscheiden Sie das Problem mit Ganzinger's Version von Nelson-Oppen.
2. Entscheiden Sie das Problem mit Ganzinger's Algorithmus *Shostak Light*.

Um sich Schreibarbeit zu sparen, müssen Sie bei *Solve* nicht immer frische Variablen einführen, z. B., die Gleichung $u = (\texttt{if } z \texttt{ then true else false})$ kann als gelöst betrachtet werden, wobei z dann als Parameter aufzufassen ist. (Nach der Spezifikation von *Solve* müssten die beiden Gleichungen $z = p$ und $u = (\texttt{if } p \texttt{ then false else true})$ zurückgegeben werden.)

Abgabe: bis **Montag, 19.12., 18.00 Uhr** im Sekretariat **(Z1.05)** oder bei Andreas Abel im Büro **(D1.09)**.