Institut für Informatik
der Universität München
Prof. M. Hofmann
Dr. J. Johannsen

SS 2002

31. Mai 2002

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen
Blatt 6

Aufgabe P-24: Zeigen Sie, dass eine Folge von m MAKE-SET-, UNION- und FIND-SET-Operationen, von denen n MAKE-SET sind, für Wälder mit Rangfunktion eine Laufzeit von $O(m \log n)$ hat. Die amortisierte Komplexität jeder Operation ist also $O(\log n)$.

Aufgabe P-25: Realisieren Sie eine Warteschlange (*queue*) mit Hilfe von zwei Kellern (*stacks*), derart dass die amortisierten Kosten jeder Operation auf der Warteschlange $O(1)$ viele Operationen auf den Kellern betragen.

Aufgabe P-26: Geben Sie den Real- und Imaginärteil, sowie Betrag und Polarkoordinaten der folgenden komplexen Zahlen an:

$$(2-i)(1+2i)\ , \quad \frac{2-i}{2i+1}\ , \quad \left(2+i\sqrt{2}\right)^4$$

Aufgabe P-27: Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

$$\{z \in \mathbb{C};\ |z| \le 1 - \mathrm{Re}(z)\}$$

$$\{3 - i + 5e^{i\varphi}\ ;\ -\pi \le \varphi \le \pi\}$$

$$\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\Big(\frac{z-1}{z+i}\Big) = 0\}$$

Aufgabe P-28: Betrachten Sie die Funktion $f(x) := \cos x + i \sin x$. Zeigen Sie, dass f die Funktionalgleichung einer Exponentialfunktion erfüllt:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

Hausaufgaben:

Aufgabe H-21: Für eine Folge von Operationen auf einer Datenstruktur gelte, dass die Kosten c_i der i-ten Operation

$$c_i = \begin{cases} i & \text{falls } i \text{ eine Zweierpotenz ist,} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind. Berechnen Sie die amortisierten Kosten mit jeder der drei in der Vorlesung vorgestellten Methoden. (4 Punkte)

Aufgabe H-22: Geben Sie eine Potenzialfunktion für Heaps an, die zeigt, dass die amortisierte Laufzeit von Heap-Insert $O(\log n)$, und die von Heap-Extract-Max $O(1)$ ist. (4 Punkte)

Aufgabe H-23: Geben Sie den Real- und Imaginärteil, sowie Betrag und Polarkoordinaten der folgenden komplexen Zahlen an:

$$(1+i)^5\,, \quad \frac{3-4i}{3i+4}\,, \quad \frac{4+i}{5i-12}\,, \quad \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$$

(4 Punkte)

Aufgabe H-24: Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

$$\{z \in \mathbb{C};\ |z-i| = \sqrt{2}\}$$

$$\{z \in \mathbb{C};\ (1+z^2) \in \mathbb{R}^+\}$$

(4 Punkte)

Aufgabe H-25: Auf einer kleinen Südseeinsel liegt ein Piratenschatz vergraben. Die Schatzkarte enthält die folgenden Anweisungen:

> **Gehe direkt vom Galgen zur Palme, dann gleichviele Schritte unter rechtem Winkel nach links — stecke die erste Fahne. Gehe vom Galgen zu den drei Felsbrocken, genausoweit unter rechtem Winkel nach rechts — stecke die zweite Fahne. Der Schatz liegt genau in der Mitte zwischen den beiden Fahnen.**

Als eine Expedition auf der Insel eintraf, waren zwar die Palme und die Felsbrocken noch vorhanden, jedoch von dem Galgen keine Spur mehr. Dennoch konnte sie den Schatz auf Anhieb finden. Wie und warum war das möglich?

Hinweis: Legen Sie die komplexe Zahlenebene als Koordinatensystem auf die Insel. (4 Punkte)

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch, 12. 6. 2002, 10^{15} Uhr.