Institut für Informatik
der Universität München
Prof. M. Hofmann
Dr. J. Johannsen

SS 2002

19. April 2002

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen

Blatt 1

Aufgabe P-1: Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- $f(n) + g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n)))$
- Wenn $f(n) = O(g(n))$ ist, so auch $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.
- $f(n) = \Theta(f(\frac{n}{2}))$

Aufgabe P-2: Zeigen Sie, dass die folgenden Äquivalenzen gelten:

$$f(n) = O(g(n)) \qquad \text{gdw.} \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

$$f(n) = o(g(n)) \qquad \text{gdw.} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Aufgabe P-3: Beschreiben Sie einen Algorithmus zur binären Suche in einem sortierten Array in Pseudocode, und führen Sie eine detaillierte Analyse von dessen Laufzeit mit Hilfe der *Master*-Methode durch.

Aufgabe P-4: Für welche der folgenden Rekursionsgleichungen kann das asymptotische Wachstum der Lösung $T(n)$ mit Hilfe der *Master*-Methode bestimmt werden? Geben Sie in den Fällen, wo dies möglich ist, möglichst scharfe asymptotische Schranken an.

- $T(n) = 8\,T(\frac{n}{2}) + 4n^3 + 2n^2$
- $T(n) = 9\,T(\frac{n}{8}) + n \log n$
- $T(n) = 9\,T(\frac{n}{3}) + n^2 \log n$
- $T(n) = 3\,T(\frac{3n}{5}) + n^2$

Hausaufgaben:

Aufgabe H-1: Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- $(f(n) + g(n))^2 = O(f(n)^2) + O(g(n)^2)$
- $f(n) = O(f(n+1))$.

(4 Punkte)

Aufgabe H-2: Führen Sie eine detaillierte Analyse der Laufzeit, wie in der Vorlesung am Beispiel INSERTION-SORT vorgeführt, für die *merge*-Routine, die beim Sortieren durch Mischen (MERGE-SORT) verwendet wird, durch.

(4 Punkte)

Aufgabe H-3: Bestimmen Sie das asymptotische Wachstum der Lösungen $T(n)$ der folgenden Rekursionsgleichungen mit der *Master*-Methode, wo dies möglich ist:

- $T(n) = 3\,T(\frac{3n}{4}) + (n^2 + 3n)^2$
- $T(n) = 2\,T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n \log n}$
- $T(n) = 7\,T(\frac{3n}{8}) + 2n^2 + 3n$
- $T(n) = 32\,T(\frac{n}{4}) + n^2\sqrt{n} + n$

(8 Punkte)

Aufgabe H-4: Entwerfen Sie einen Algorithmus für das folgende Problem: für eine Menge M von reellen Zahlen und eine weitere reelle Zahl r ist zu entscheiden, ob sich r als Summe $r = s + t$ zweier Elemente $s, t \in M$ schreiben lässt. Ihr Algorithmus sollte Laufzeit $\Theta(n \log n)$ haben, zeigen Sie dies.

(4 Punkte)

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 3. 5. 2002, 10^{15} Uhr.