

TENTAMEN DIT980
Diskret Matematik för Datavetare

25 oktober 2017, 8:30 - 12:30

-
- Det finns totalt **7 uppgifter**.
 - Läs igenom alla uppgifter noga **innan du börjar**, och försäkra dig om att du förstår.
 - I dina svar, ange tydligt **vilken uppgift** det är du svarar på.
 - Skriv **tydligt** och **överskådligt**. Skriv rent dina svar; vi som rättar vill **inte se ditt kladd**.
 - Tillåtna hjälpmedel:
 - En **handskriven A4-sida** med anteckningar **på 1 sida**. Anteckningarna ska lämnas in tillsammans med dina svar.
 - En **godkänd miniräknare**.



Varje uppgift kan ge 0, 1, eller 2 poäng:

- 0p = svaret på uppgiften är otillräckligt
- 1p = svaret innehåller bra saker men också några brister
- 2p = svaret är tillräckligt bra (men får innehålla småfel)

Poänggränser: **G** = 7-10p, **VG** = 11-14p.

LYCKA TILL!

Uppgift 1

Bestäm för varje formel nedan om den är valid eller inte. (En formel kallas för valid om den alltid är sann.)

(a) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

(b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

Motivera dina svar med hjälp av sanningstabeller.

Uppgift 2

Betrakta följande rekursiva funktionsdefinition för funktionen $F : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$:

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = 0$$

$$F(n) = 1 + F(n-2) \quad , \text{ när } n > 1$$

Bevisa med hjälp av stark induktion över n att $F(n) = n \text{ div } 2$, för alla $n \geq 0$.

(Notation: $a \text{ div } b$ betyder heltalsdivision av a med b . T.ex. $4 \text{ div } 2 = 2$, $5 \text{ div } 2 = 2$, $6 \text{ div } 2 = 3$, $7 \text{ div } 2 = 3$.)

Uppgift 3

Betrakta följande två kongruenser:

$$x \equiv 5 \pmod{11}$$

$$x \equiv 6 \pmod{7}$$

Vilka heltal x finns mellan 0 och 200 som uppfyller **båda** dessa kongruenser? Visa tydligt alla steg i ditt resonemang.

Uppgift 4

Jag tänker på två naturliga tal a och b . Nu avslöjar jag att:

$a \cdot b$ är ett primtal

och att

$a^2 + b^2$ också är ett primtal.

Kan du nu veta säkert vilka tal a och b jag tänker på? Förklara vilka möjligheter för a och b som finns (och varför dessa är alla möjligheter).

Uppgift 5

Bevisa att följande utsaga gäller: För alla listor xs och ys :

$\text{length } (xs ++ ys) = \text{length } xs + \text{length } ys$

Du får använda dig av följande definitioner:

```
length :: [a] -> Int
length [] = 0
length (x:xs) = 1 + length xs
```

```
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[] ++ ys = ys
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)
```

Ange tydligt alla steg du tar i beviset och varför du får ta dem. Ange också tydligt vad din induktionshypotes är och var du använder den.

Uppgift 6

Givet en riktad graf G med n noder och $n+1$ kanter (pilar).

Bestäm för varje påstående nedan om det är sant eller falskt. Ge då också ett bevis eller motbevis.

- (a) G måste innehålla en cykel.
- (b) G måste innehålla någon nod som har ingrad ("indegree") åtminstone 2.

Uppgift 7

Givet en mängd $A = \{1,2,3\}$. Vi ska undersöka operatorerna på A , dvs. funktioner f :

$$f : A \times A \rightarrow A$$

- (a) Hur många operatorer av typen $A \times A \rightarrow A$ finns det?
- (b) Hur många *kommutativa* operatorer av typen $A \times A \rightarrow A$ finns det?

Förklara dina svar. Dina svar behöver **inte vara helt uträknade**; det räcker med uttryck som innehåller siffror, plus, gånger, dela med, potenser, faktoriell- och/eller över-funktionen.

Hint: För att räkna antalet operatorer, kolla på vilka val du behöver göra för att fylla i funktionstabellen för operatören.

(inga fler uppgifter)

