

TENTAMEN DIT980
Diskret Matematik för Datavetare
20 december 2017, 8:30 - 12:30

- Det finns totalt **7 uppgifter**.
- Läs igenom alla uppgifter noga **innan du börjar**, och försäkra dig om att du förstår.
- I dina svar, ange tydligt **vilken uppgift** det är du svarar på.
- Skriv **tydligt** och **överskådligt**. Skriv rent dina svar; vi som rättar vill **inte se ditt kladd**.
- Tillåtna hjälpmedel:
 - En **handskriven A4-sida** med anteckningar **på 1 sida**. Anteckningarna ska lämnas in tillsammans med dina svar.
 - En **godkänd miniräknare**.



Varje uppgift kan ge 0, 1, eller 2 poäng:

- 0p = svaret på uppgiften är otillräckligt
- 1p = svaret innehåller bra saker men också några brister
- 2p = svaret är tillräckligt bra (men får innehålla småfel)

Poänggränser: **G** = 7-10p, **VG** = 11-14p.

LYCKA TILL!

Uppgift 1

Bestäm för varje formel nedan om den är valid eller inte. (En formel kallas för valid om den alltid är sann.)

(a) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

(b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

Motivera dina svar med hjälp av sanningstabeller. (Symbolen $\neg$ ovan betyder "icke".)

Uppgift 2

Betrakta följande rekursiva funktionsdefinition för funktionen $F : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$:

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = 3$$

$$F(n) = F(n-2) + 6, \text{ när } n > 1$$

Bevisa med hjälp av (stark) induktion över n att $F(n) = 3 \cdot n$, för alla $n \geq 0$.

Uppgift 3

Betrakta följande två kongruenser:

$$x \equiv 6 \pmod{11}$$

$$x \equiv 5 \pmod{7}$$

Vilka heltal x finns mellan 0 och 200 som uppfyller **båda** dessa kongruenser? Använd "pulverizer" (även kallad Bezouts identitet) och visa tydligt alla steg i ditt resonemang.

Uppgift 4

Jag tänker på två primtal p och q . Nu avslöjar jag att:

$$p^2 - q^2 \text{ också är ett primtal.}$$

Kan du nu veta säkert vilka tal p och q jag tänker på? Förklara vilka möjligheter för p och q som finns (och varför dessa är alla möjligheter).

Uppgift 5

Bevisa att följande utsaga gäller: För alla listor xs och ys :

$$\text{length } (xs ++ ys) = \text{length } xs + \text{length } ys$$

Du får använda dig av följande definitioner:

```
length :: [a] -> Int
length []      = 0
length (x:xs) = 1 + length xs
```

```
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[] ++ ys = ys
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)
```

Ange tydligt alla steg du tar i beviset och varför du får ta dem. Ange också tydligt vad din induktionshypotes är och var du använder den.

Uppgift 6

Givet en riktad graf G med n noder och $n+1$ kanter (pilar).

Bestäm för varje påstående nedan om det är sant eller falskt. Ge då också ett bevis eller motbevis.

- (a) G måste innehålla en cykel.
- (b) G måste innehålla någon nod som har ingrad ("indegree") åtminstone 2.

Uppgift 7

Du och din kompis tar en kurs med 60 deltagare. Klassen delas slumpmässigt upp i 6 grupper av storlek 10.

- (a) Vad är sannolikheten att du och din kompis hamnar i samma grupp?

Antag nu att ni **inte** hamnade i samma grupp. Några studenter slutar och läraren bestämmer sig att slå ihop de befintliga 6 grupperna till 3 nya grupper, där varje ny grupp består utav två ihopslagna gamla grupper.

- (b) Vad är sannolikheten nu att du och din kompis hamnar i samma (nya) grupp?

Motivera dina svar.

(inga fler uppgifter)

