

God Morgon!

Kombinatorik

|  | mån               | ons               | tors                           | fre         |
|--|-------------------|-------------------|--------------------------------|-------------|
|  |                   |                   | kombi<br>I                     | kombi<br>II |
|  | popular<br>demand | övningar<br>kombi | samman-<br>fattnings<br>förel. | X           |

↑ maila

← tentan

← sista inlämningen

koen@chalmers.se

Subject: "POPULAR"

kombinatorik = konsten att räkna saker  
möjligheter

↓  
sannolikhet

räkna / gå igenom  
varje möjlighet — dator

matematik  
kombinatorik — "formel"

mycket  
större tal

# räkneprinciper

## additionsprincipen

20 olika pizzor  
20  
<sup>exklusiv</sup>  
eller  
3 rätter  
3

$20 + 3$  : kombinera olika alternativ med +

## subtraktionsprincipen

2 luncher

2 glass

inte 2 ggr  
mango

räkna vad du inte vill ha, och ta bort det

2 · 2 otillåtna kombinationer

svar:  $230 - 4 = 226$

## multiplikationsprincipen

lunch och glass

23

10

$$23 \cdot 10 = 230$$

/ lunchkombinationer

kombinerar val <sup>oberoende</sup> man gör samtidigt med •

## divisionsprincipen

20 · 19

(salami, veg)

(veg, salami)

svar:  $\frac{20 \cdot 19}{2}$

2 olika pizzor

om man har likvärdiga val, dela

med antalet som är likvärdiga med varandra

intermezzo: n pizzer

antalet sätt 2 olika

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

← känner du igen?

mult. och div. principen

salami? veg? hawaii?

$$19 + 18 + 17 + 16 + \dots + 1$$

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1$$

additionsprincipen

båda rätt! alltså:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1)$$

"kombinatoriskt bevis" — vackra

# permutationer / kombinationer

$$0! = 1$$

- $n$  studenter på rad  
hur många sätt?

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

antalet permutationer av  $n$   
saker :  $n!$

ny  
notation  
"fakultet"  
("factorial") (inte "faculty"!!)

- $n$  studenter,  $k$  stolar ( $k \leq n$ )

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}_{k \text{ saker}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ex.

$$n=10$$
$$k=3$$

$$\text{svar: } 10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{7!}$$

- $n$  studenter,  
"grupp" på  $k$  studenter  
hur många sätt?

divisionsprincipen för  
att dela bort likvärdiga  
val (t.ex. ABC, CBA, ACB, ...)

$$\frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k}$$

" $n$  över  $k$ "

"( $n$  choose  $k$ )"  
(kombinationer)

exempel: 15 studenter, 4 ung. lika stora grupper  
 hur många olika sätt?

4+4+4+3

$$\frac{\binom{15}{4} \cdot \binom{11}{4} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3}}{3! \cdot 1!}$$

3! · 1!

eftersom det  
finns 3 grupper som  
är lika stora

ordningen  
av  
studenter  
i  
gruppen,  
ordningen  
av  
grupperna,  
spelar  
ingen  
roll

ex.  
n=18  
grupper  
4, 4, 4, 3, 3 :

$$\frac{\binom{18}{4} \cdot \binom{14}{4} \cdot \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}}{3! \cdot 2!}$$

3! · 2!

# Blaise Pascal

1600s

väger dit

LLLR

LLRL

LRLL

RLLL

$\binom{4}{1}$

LLRR

LRLR

RLLR

RRLR

RLRL

LRRL

$\binom{4}{2}$

$k=0$

$k=1$

$k=2$

$k=3$

$k=4$

Pascals identitet:  $k$ : hur många ggr har du valt R?

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$\leftarrow n=0$

$\leftarrow n=1$

$\leftarrow n=2$

$\leftarrow n=3$

$\leftarrow n=4$

$\Sigma$

1

2

4

8

16

$n$ :

hur många L/R val har

du gjort?

varje spik har  $\binom{n}{k}$  möjligheter!

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

↑  
summan av  
hur många vägar  
till en spik på  
rad n

hur många  
vägar till  
rad n finns det?

vi gör n val på vägen dit  
varje val har 2 alternativ: L/R

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ val}} = 2^n$$

imorgon  
kl. 10:00  
magiskt  
🤖 trick!