

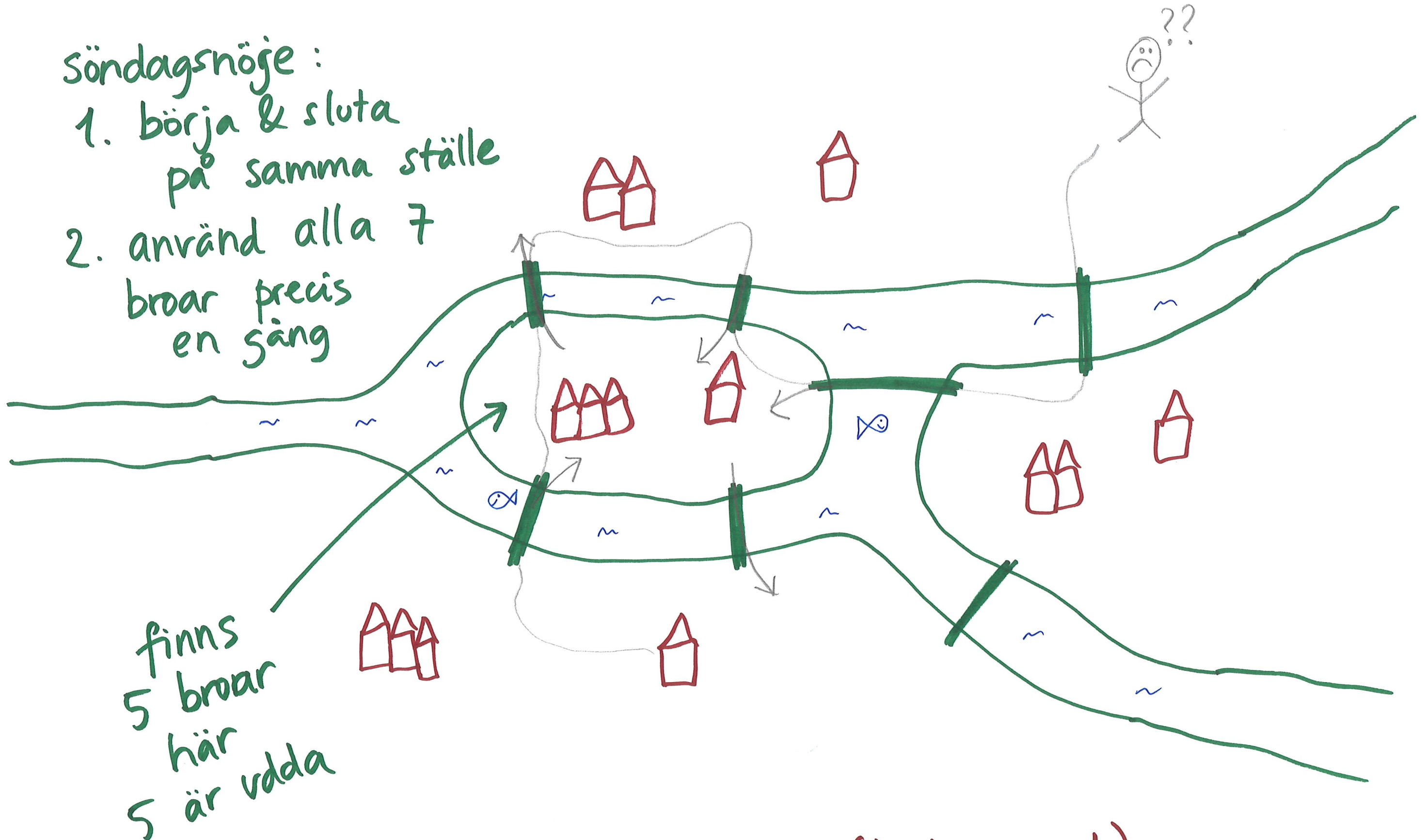
GRAFER

Euler

1736

Söndagsnöje :

1. börja & sluta på samma ställe
2. använd alla 7 broar precis en gång



Königsberg

(Kaliningrad)

maximala
antalet kanter

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

vid n
noder

"enkel"

Graf:

matematiskt
koncept

(V, E)

noder

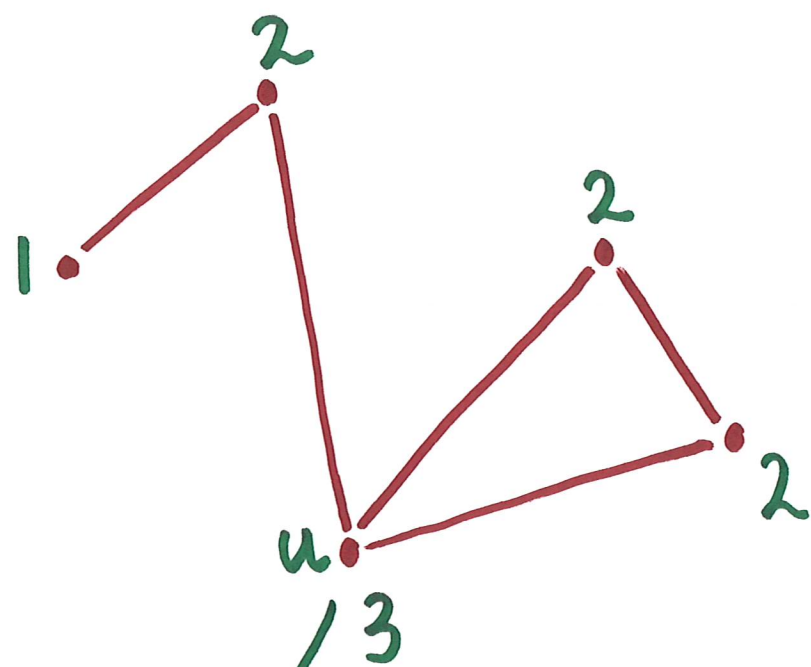
(nodes, vertices)
(vertex)

kanter
(pilar)

(edges)

$$f(x) = x^2$$

(graf)



gradtal
(degree)

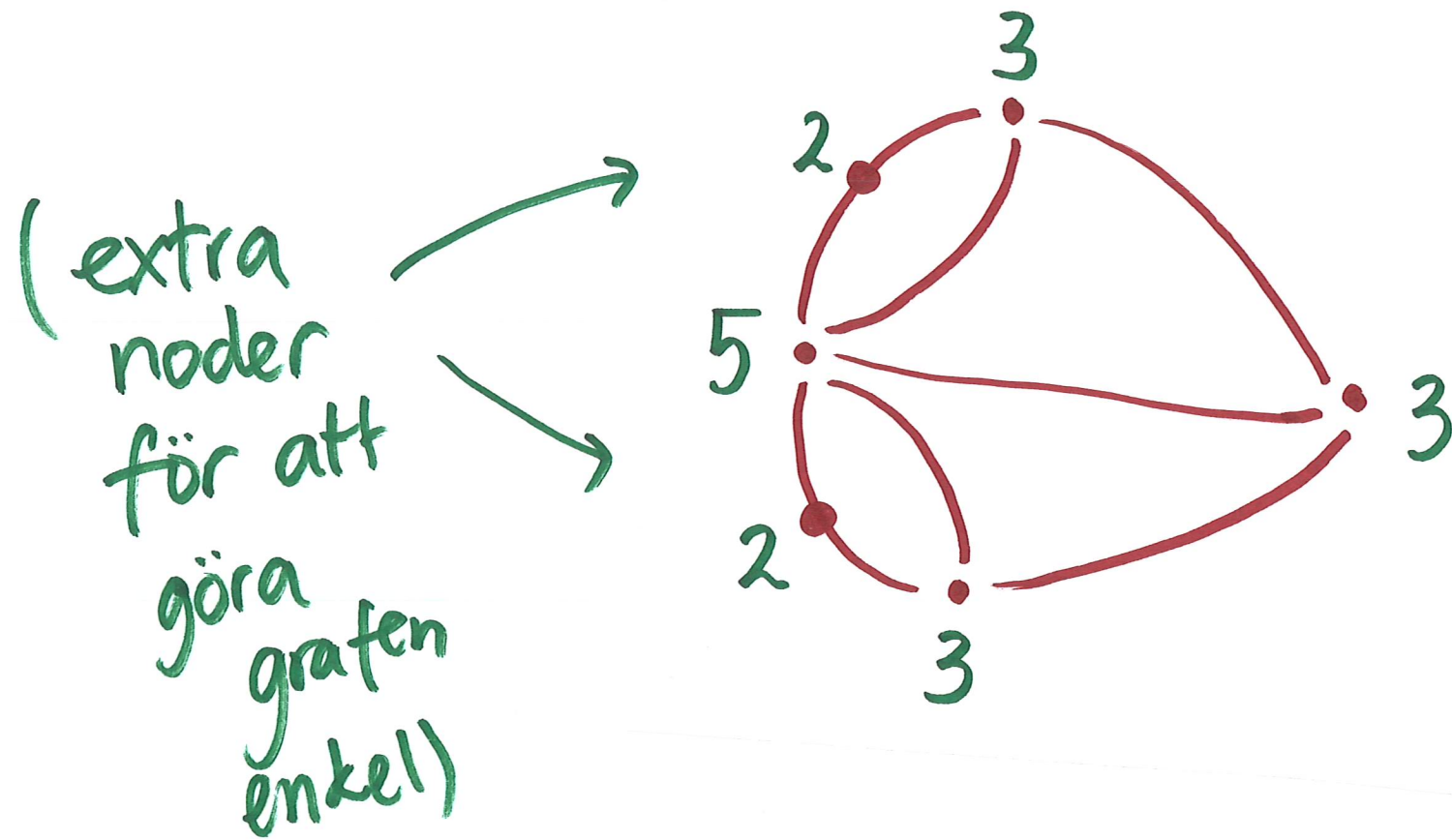
$\deg(u)$

- hur många
kanter har
den noden?

mängd av delmängder
av V av storlek 2

- varje par av noder u, v
har antingen en kant
eller inte
- omöjligt att ha kant
från u till u själv

graf-modell
av Königsberg



graf
(V, E)

väg (walk)

en sekvens av noder
där det finns en kant
mellan varje u_i, u_{i+1}

$u_1, u_2, \dots, u_n$

för $1 \leq i < n$

längd:

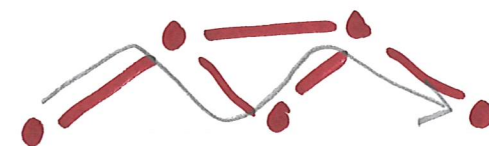
antalet
kanter
(steg)

tom väg: längd 0
bara en nod u



enkel väg (path) (stig)

en väg där ingen nod upprepas

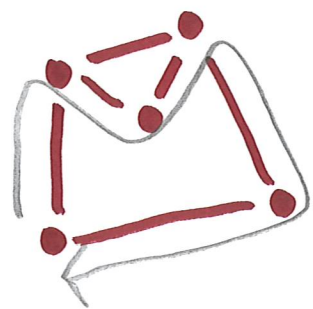


sluten väg (closed walk)

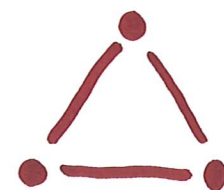
en väg där början och slutet är samma nod ($u_1 = u_n$)

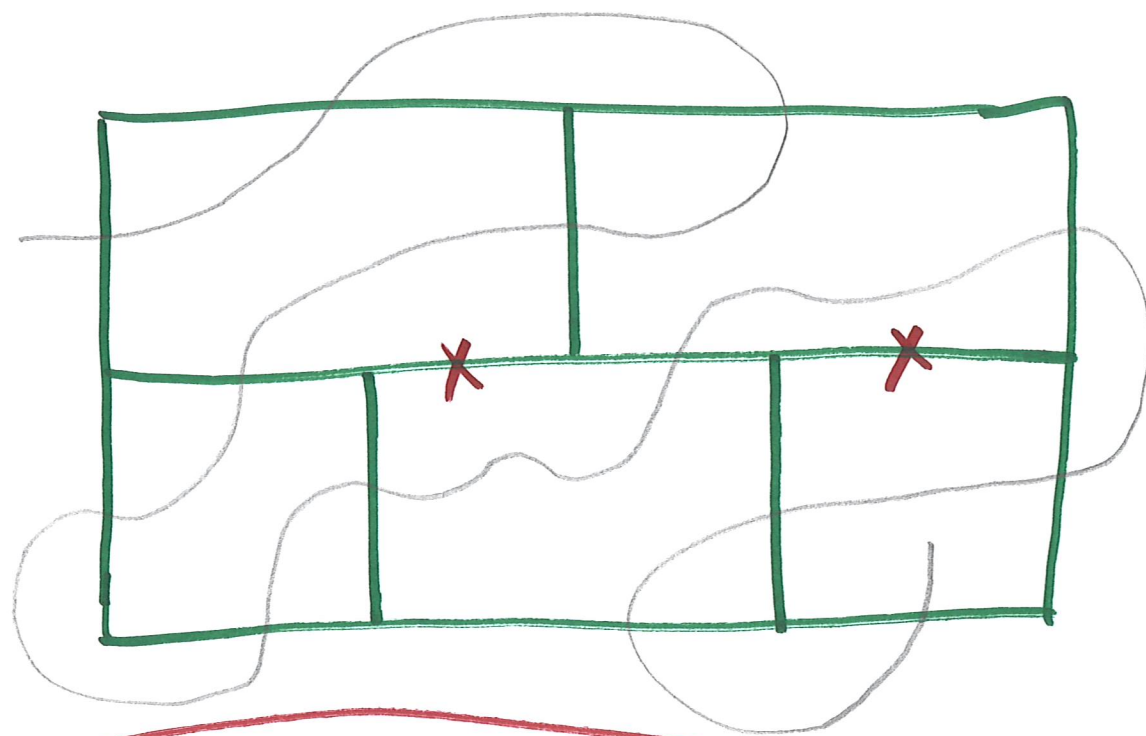
cykel (cycle)

en sluten väg där ingen nod upprepas (förutom början och slut)

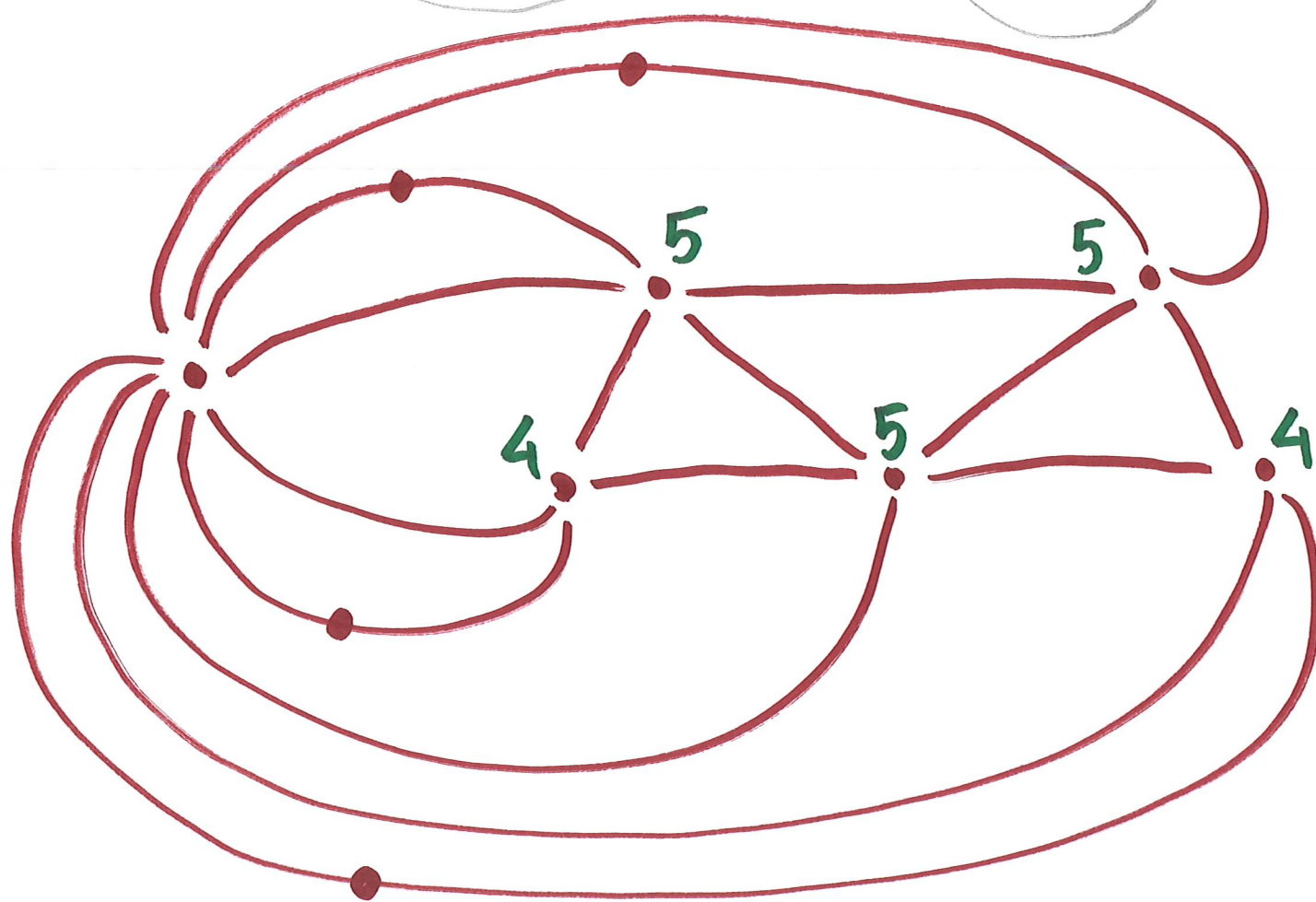


enkel graf:
åtminstone längd 3





hitta linje?
 som går genom
 varje "dörr"
 exakt 1 gång?



visa: om en graf har en väg mellan u och v

då finns det en enkel väg mellan u och v

bevis: med stark induktion över längden på vägen mellan u och v

Låt $P(n)$ = "om det finns en väg av längd n från u till v
då finns en enkel väg från u till v "

Basfall: $P(0)$: väg av längd 0 (tomma vägen) är redan enkel.
OK!

stegfall: $(P(0) \wedge \dots \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1)$

anta: väg av längd $i \Rightarrow$ enkel väg $(0 \leq i \leq k)$ (I.H.)

visa: väg av längd $k+1 \Rightarrow$ enkel väg

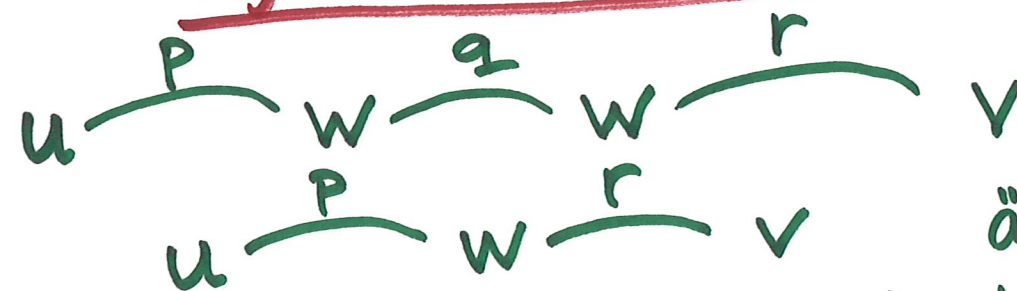
1. vi har en väg av längd $k+1$. Falluppdelning:

redan enkel väg

färdigt

vet:

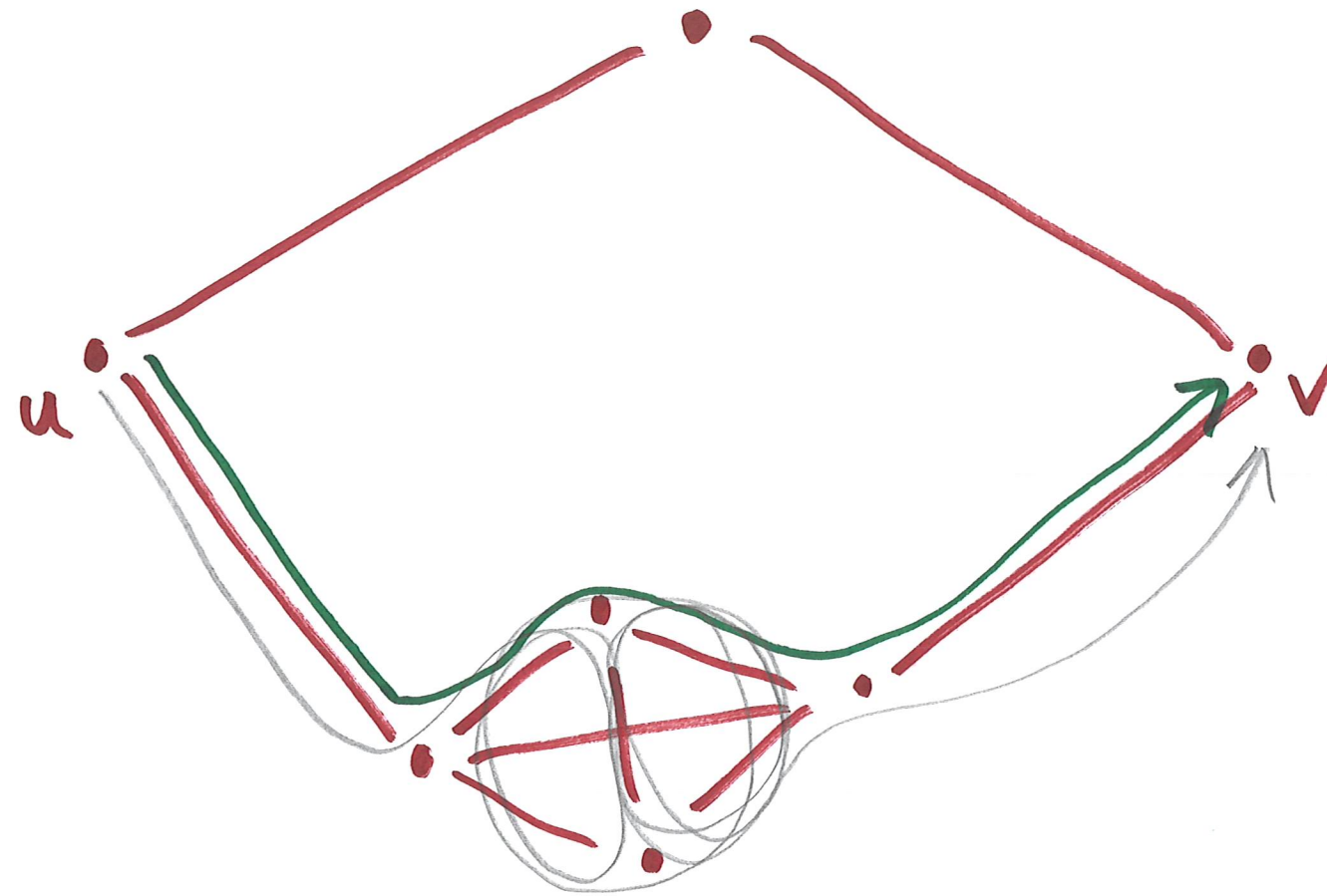
kolla:



(måste upprepas)
 w
är en väg kortare än $k+1$!

med (I.H.) vet vi att det finns en enkel väg från u till v !

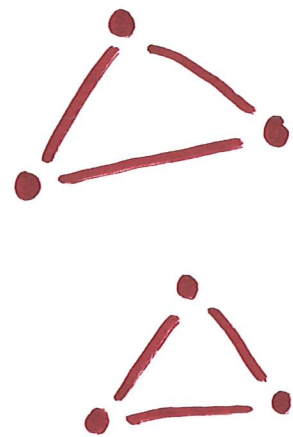
(exempel)



eulercykel (Euler tour)

(ingen
cykel!
😱)

sluten väg där varje kant i G
används exakt 1 gång



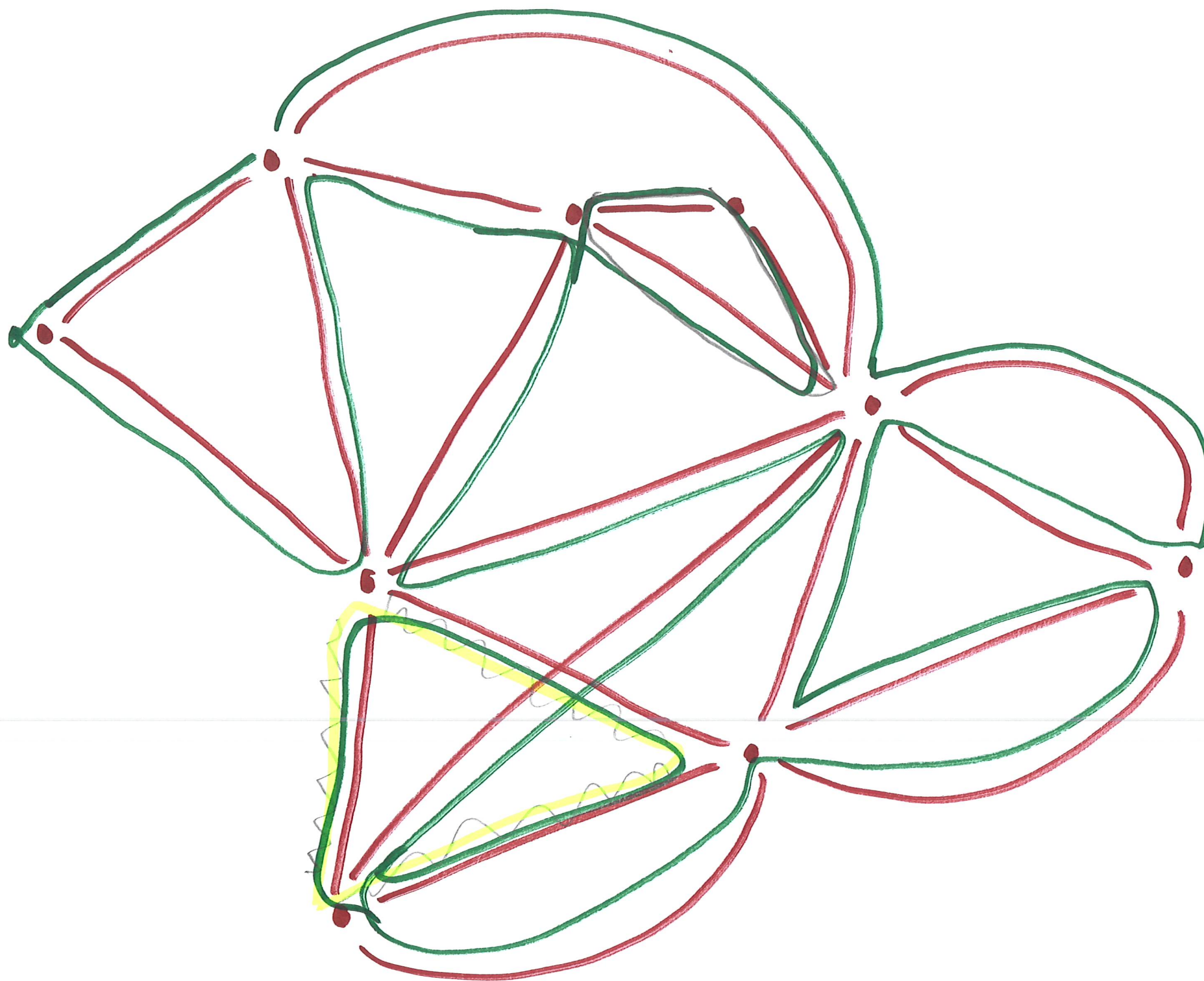
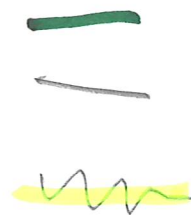
varje nod i
 G har
jämt gradtal

G är
sammanslagande

G har
eulercykel

finns en
väg från
 u till v
för alla
 $u, v \in V$

mini-eulercykel



hur hitta en mini-eulercykel i G ↖ jämt gradtal

- ① välj en nod n och en kant från den
- ② följ kanten till nästa nod, ta en kant som går ifrån den som inte redan använts!
i denna mini-eulercykel
- ③ upprepa
- ④ när slutar det? → när jag kommer tillbaka till n
- ⑤ ta bort alla kanter vi använt från G

invariant: alla noder har jämt gradtal

forts.
imorgon
fredag