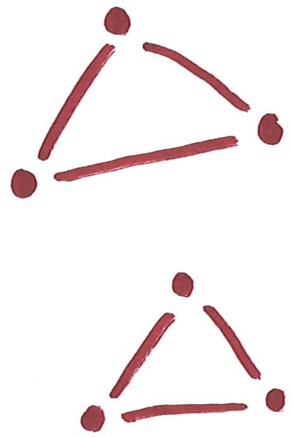
eulercykel (Euler tour)

(ingen cykel! 😮)

sluten väg där varje kant i G används exakt 1 gång



varje nod i G har jämt gradtal

G är sammanhängande

finns en väg från u till v för alla u, $v \in V$

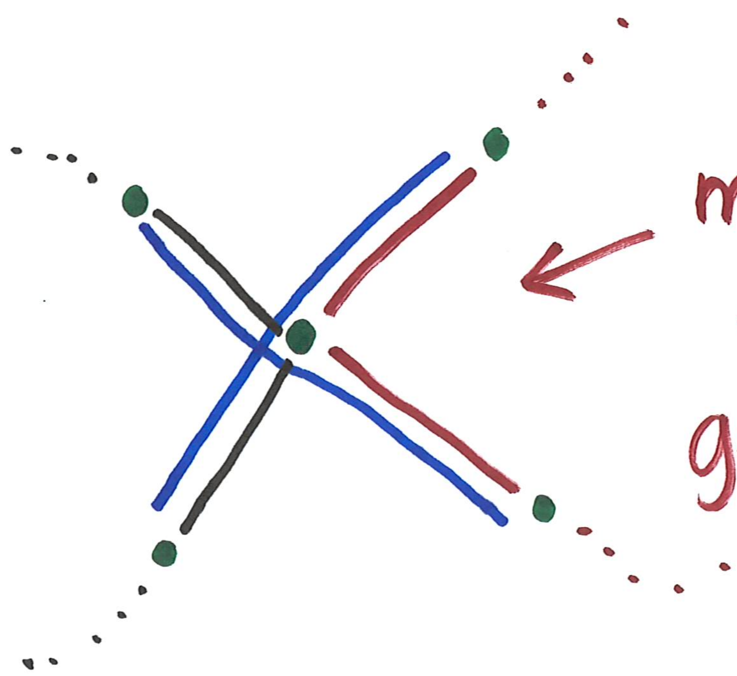
G har eulercykel

<u>visa</u> : om G är sammanhängande och alla noder har jämt gradtal, då har G en eulercykel

<u>bevisskiss</u> :

① hitta mini-eulercykler i G så att alla kanter har använts exakt 1 gång

② sy ihop 2 mini-eulercykler till 1, tills det bara är 1 kvar



måste ha 1 nod gemensam

hur hitta en mini-eulercykel i G

jämnt gradtal

1. välj en nod n och en kant från den
2. följ kanten till nästa nod, ta en kant som går ifrån den som inte redan använts! i denna mini-eulercykel
3. upprepa
4. när slutar det? → när jag kommer tillbaka till n
5. ta bort alla kanter vi använt från G

<u>invariant</u>: alla noder har jämnt gradtal

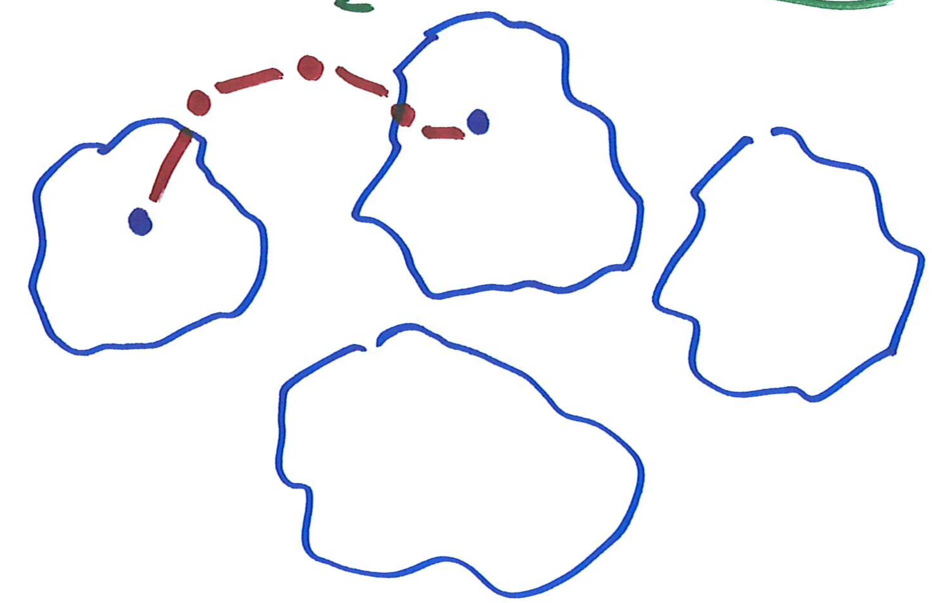
forts. imorgon fredag

vi har graf G

- sammanhängande
- ett gäng mini-eulercykler
  varje kant i G finns med i exakt 1 mini-eulercykel
- flera mini-eulercykel

då

- finns 2 mini-eulercykler som har en gemensam nod
  $\Rightarrow$ sy ihop!

G: 

vägen måste ha en nod som har 1 kant med i en mini-eulercykel och 1 kant med i en annan

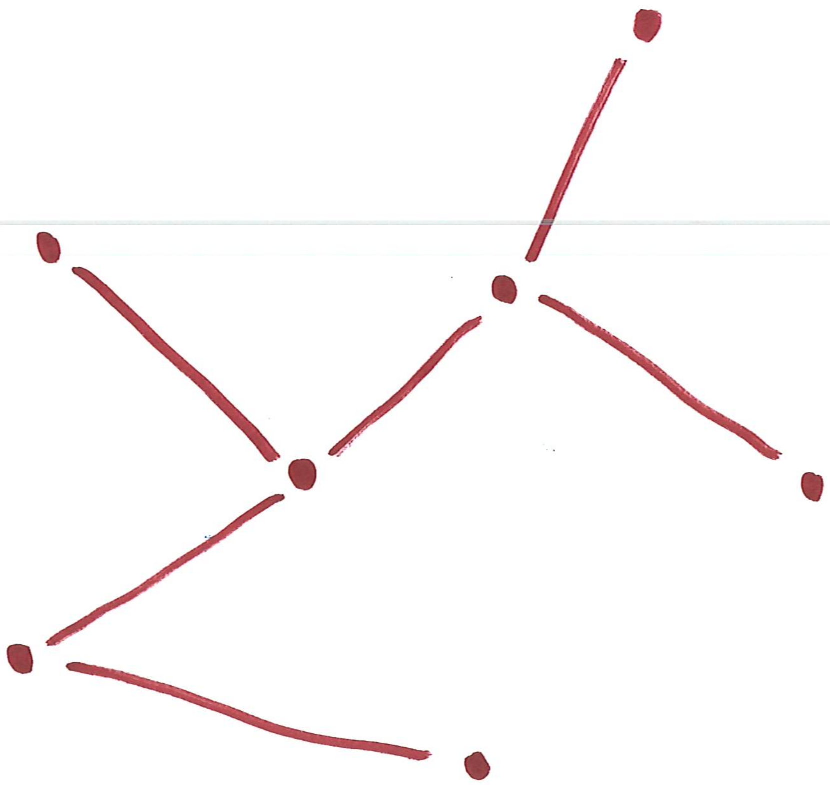
enkla grafer

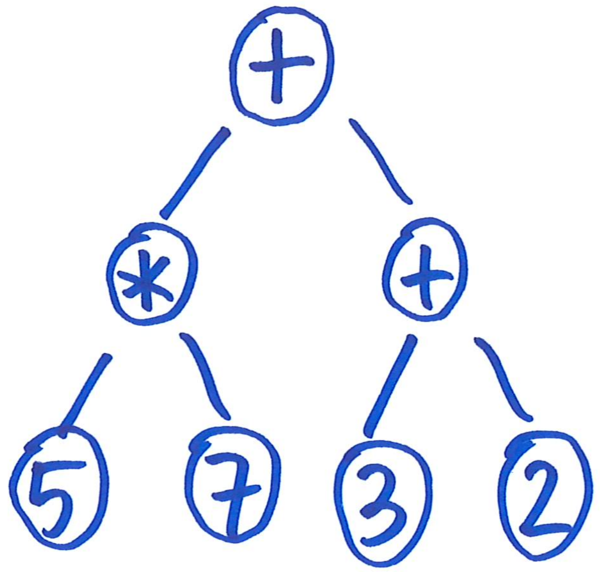
"kartor"

"nätverk"

G är ett "träd":

- sammanhängande
- inga cykler





$(5*7)+(3+2)$

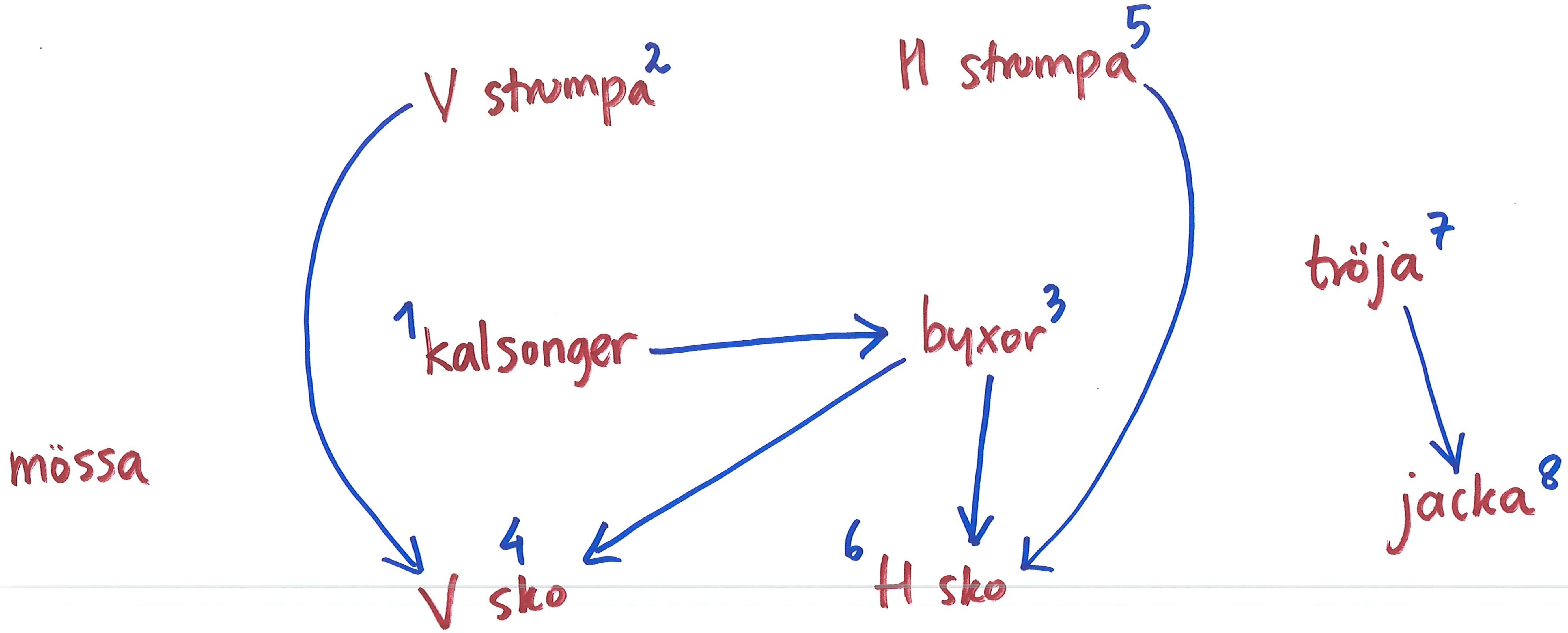
8

G träd:

G
n noder

G
n-1 kanter

riktade grafer

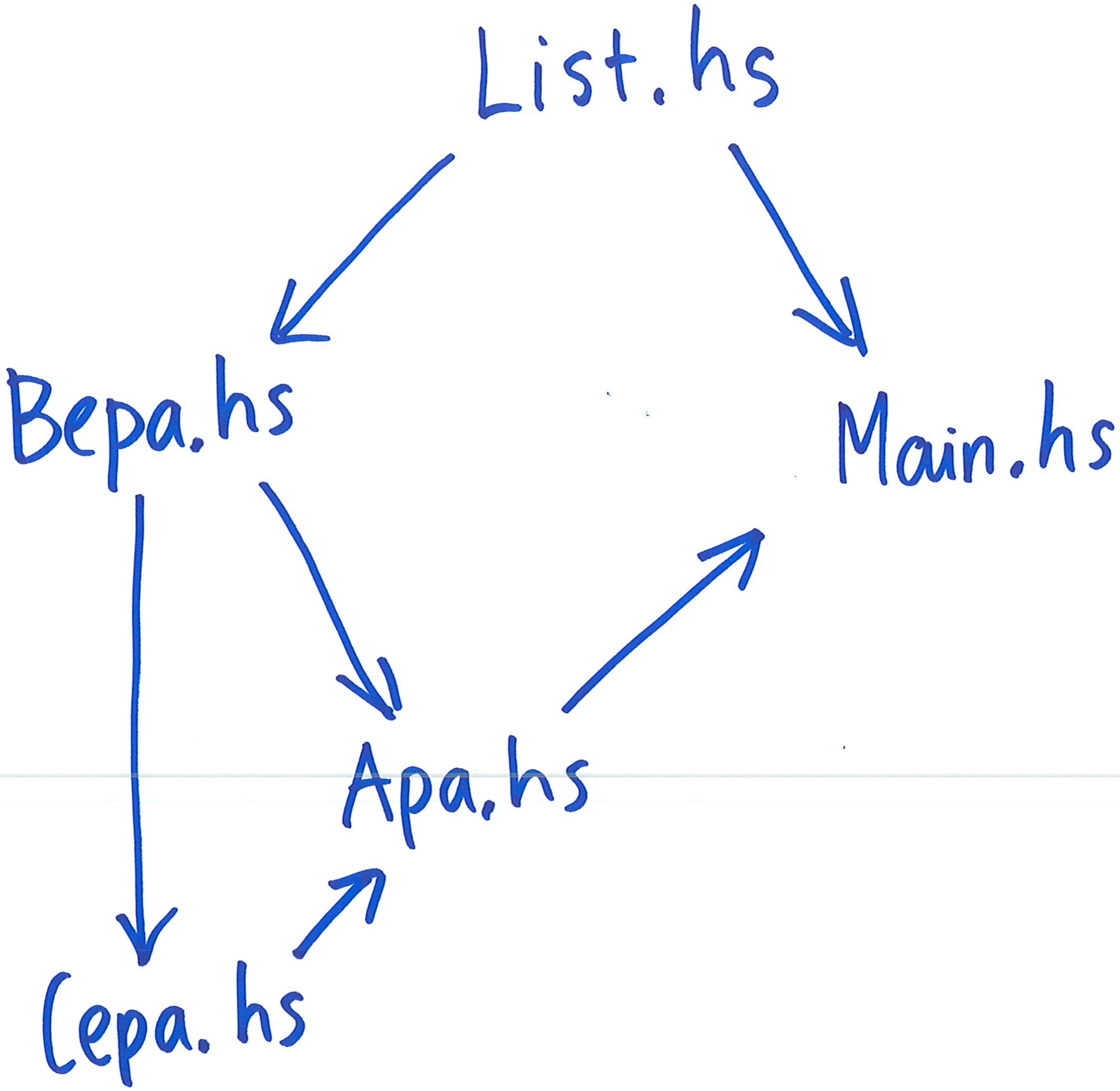


ordning? ← "beroendegraf"

beroendegraf

$\downarrow$

ordning?



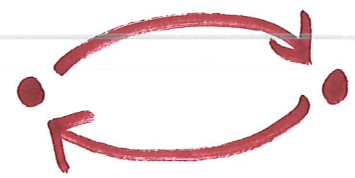
riktad graf $G = (V, E)$

noder

kanter, pilar

ordnat par (u,v) av noder $u, v \in V$

1. kan ha kant (u,v) och kant (v,u)



2. kan ha kant (u,u)

"loop"

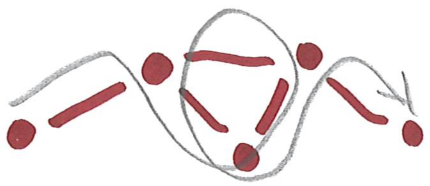
graf (V,E)

väg (walk)

en sekvens av noder $u_1, u_2, \dots, u_n$

där det finns en kant mellan varje u_i, u_{i+1} för $1 \le i < n$

längd: antalet kanter (steg)

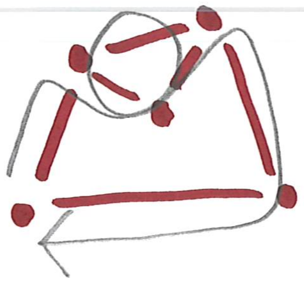


tom väg: längd 0

bara en nod u

enkel väg (path) (stig)

en väg där ingen nod upprepas

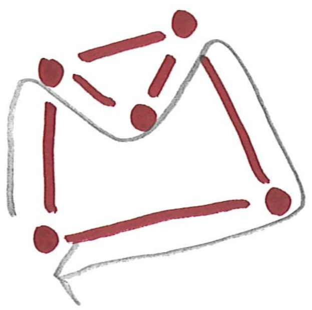


sluten väg (closed walk)

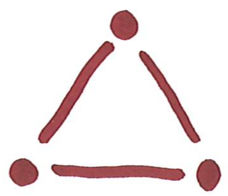
en väg där början och slutet är samma nod ($u_1 = u_n$)

cykel (cycle)

en sluten väg där ingen nod upprepas (förutom början och slut)



enkel graf: åtminstone längd 3



riktad graf:

visa: om en graf har en **väg** mellan u och v
då finns det en **enkel väg** mellan u och v

bevis: med stark induktion över **längden på vägen** mellan u och v

Låt $P(n)$ = "om det finns en väg av längd n från u till v
då finns en enkel väg från u till v"

Basfall: $P(0)$: väg av längd 0 (tomma vägen) är redan enkel.
OK!

stegfall: $(P(0) \wedge \dots \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1)$

anta: väg av längd i ⇒ enkel väg $(0 \leq i \leq k)$ (I.H.)

visa: väg av längd $k+1$ ⇒ enkel väg

1. vi har en väg av längd $k+1$. Falluppdelning:

redan enkel väg

färdigt

ingen enkel väg (måste upprepas w)

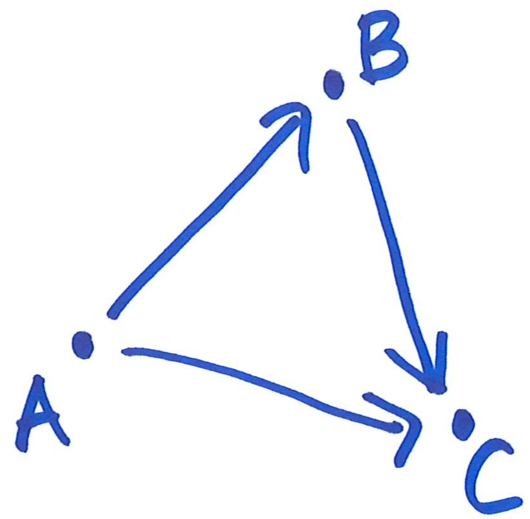
vet: $u \overset{p}{\frown} w \overset{q}{\frown} w \overset{r}{\frown} v$

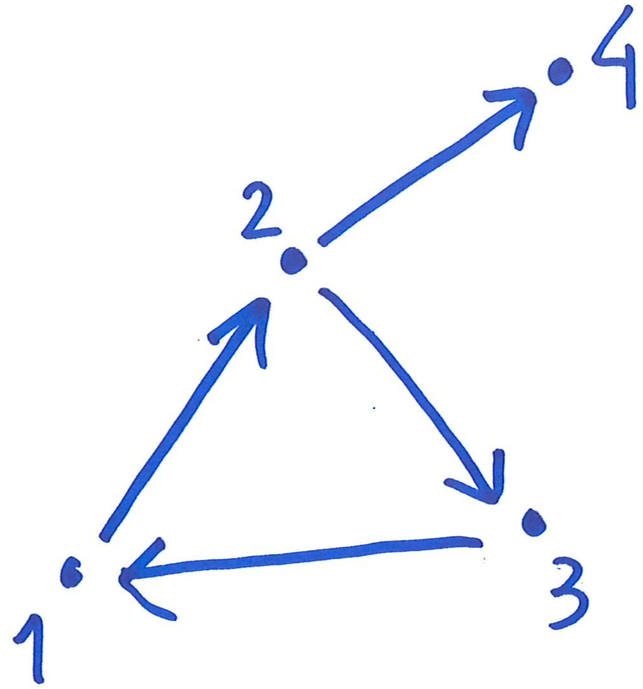
kolla: $u \overset{p}{\frown} w \overset{r}{\frown} v$ är en väg kortare än $k+1$!

med I.H. vet vi att det finns en enkel väg från u till v!

gäller också för riktade grafer!

riktade grafer





beroendegrafer

ordning: A, B, C

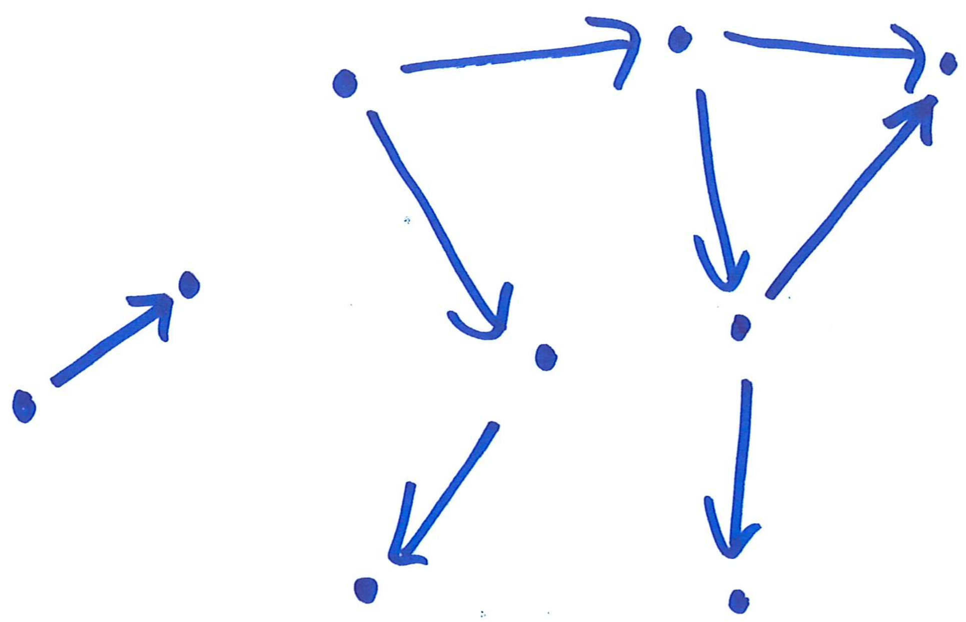
ingen ordning / omöjligt

---

def. "topologisk ordning": givet en riktad graf $G=(V,E)$
en topologisk ordning är en sekvens av alla noder i V: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (alla noder är med exakt 1 gång)
sådant att alla pilar i E pekar V-till-H i sekvensen:
$\forall (v_i, v_j) \in E.\ i < j$

def. en riktad graf utan cykler kallas DAG.

directed acyclic graph



träd $\neq$ DAG

claim: en riktad graf har en topologisk ordning om och endast om den är en DAG

G har top. ordning $\iff$ G har inga cykler

① $\Rightarrow$

② $\Leftarrow$

visa : om G har en topologisk ordning, då har G inga cykler

bevis : motsägelsebevis. tänk en graf G

- har top. ordning $v_1, v_2, \dots, v_n$ (bara V-till-H)
- cykel $u_1, u_2, \dots, u_k, u_1$

hitta v_i som ligger sist i top. ordning och som finns med i cykeln

vi vet att v_i pekar på sin nästa granne i cykeln, som måste ligga till vänster om v_i i top. ordningen

omöjligt!

$\square$

$$\boxed{A \Rightarrow \neg B \equiv B \Rightarrow \neg A}$$

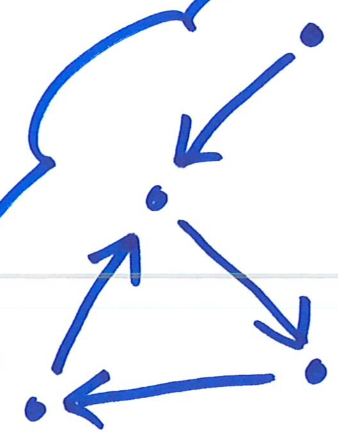
givet en riktad graf G.

<u>def.</u> en <u>enstöring</u> är en nod i G som inte har pilar till sig

"löv"

(jag har hittat på)

<u>claim</u> : om G inte har cykler, då har G minst en enstöring



gäller alltså INTE åt andra hållet!

visa: en graf G utan cykler har en enstöring

bevis:
1. ta vilken nod u som helst
2. om u enstöring, färdiga! ← här tar det slut
3. om inte, finns det någon som pekar på u, gå dit
4. upprepa

denna process kommer ta slut, eftersom vi inte kan besöka samma nod 2 ggr. (då skulle vi ha en cykel!)

visa: en graf G utan cykler har en topologisk ordning

bevis: med induktion över antalet noder i G

Låt $P(n) =$ "en graf G utan cykler och n noder har en top. ordning"

basfall: $P(1)$: top ordningen är bara den ena noden.

stegfall: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ för $k \geq 1$

I.H.

anta: en graf med k noder och inga cykler har en top. ordn.

visa: en graf med k+1 noder och inga cykler har en top. ordn.

- G k+1 noder, inga cykler
- G måste ha enstöring u
- skapa G′ genom att bort u och dess pilar från G
- G′ har k noder, inga cykler.
- I.H. säger att G′ top. ordning: $v_1, v_2, \dots, v_k$
- G:s top. ordning är då: $u, \overbrace{v_1, v_2, \dots, v_k}$ ← (alla pilar V-till-H)

bara pilar till H

□

enkla grafer

gradtal
(degree)

deg(v) =
antalet
kanter
med v

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot |E|$$

|A| är antalet element
i A

riktade grafer

ingrad
(indegree)

indeg(v) =
antalet
pilar som
pekar på
v

utgrad
(outdegree)

outdeg(v) =
antalet
pilar som
går
ut från v

$$\sum_{v \in V} indeg(v) = \sum_{v \in V} outdeg(v)$$

<u>enstöring</u>: indeg = 0
outdeg vad som helst