

God Morgan!

BY POPULAR DEMAND

(stark)
induktion

invarianter

modulär
aritmetik

delbarhet

hur kollar man?

med

- | | | |
|-----|----------------------------------|----------------------------------|
| 1 | - alla tal | $10 = 2 \cdot 5$ |
| 2 | - sista siffran delb. 2 | $10 - 1 = 3 \cdot 3$ |
| * 3 | - summan av alla siffror delb. 3 | <hr/> |
| 4 | - sista 2 siffrorna delb. 4 | $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ |
| 5 | - sista siffran delb. 5 | $16 - 1 = 3 \cdot 5$ |
| 6 | - delb. 2 och 3 | |
| 7 | - ? | |
| 8 | - sista 3 siffrorna delb. 8 | |
| * 9 | - summan av alla siffror delb. 9 | |

$$3 \mid 125$$

$$3 \mid 225$$

nej eftersom

ja eftersom

$$\begin{aligned}3 &\nmid 8 \\3 &\mid 9 = 2+2+5\end{aligned}$$

$$= 1+2+5$$

vill visa: för alla $n \in \mathbb{N}$: n delb. 3 $\Leftrightarrow S(n)$ delb. 3

visar i stället:

$\forall n \in \mathbb{N}:$

$$n \equiv S(n) \pmod{3}$$

$S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $S(n) =$ summan
av alla
siffror av n

ex. $n = 125$

$$\begin{aligned} 125 &\stackrel{?}{\equiv} 8 \pmod{3} \\ 2 &\stackrel{!}{\equiv} 2 \pmod{3} \end{aligned}$$

① $S(b) = b$ om $0 \leq b \leq 9$

② $S(10a+b) = S(a)+b$ om $0 \leq b \leq 9$

visa: $n \equiv S(n) \pmod{3}$ för $n \in \mathbb{N}$

bevis: med stark induktion över n

Låt $P(n)$ = "n $\equiv S(n) \pmod{3}$ "

basfall: $P(b)$ för $0 \leq b \leq 9$

$b = S(b)$, alltså $b \equiv S(b) \pmod{3}$

stegfall: $(P(0) \wedge \dots \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1)$, för $k \geq 9$

anta: $P(i)$: " $i \equiv S(i) \pmod{3}$ ", $0 \leq i \leq k$

visa: $P(k+1)$: " $k+1 \equiv S(k+1) \pmod{3}$ "

$$k+1 = 10a + b$$

$$\equiv a + b$$

$$\equiv S(a) + b$$

$$= S(10a + b)$$

$$= S(k+1)$$

$$\pmod{3} \quad *$$

(för något $a, b \in \mathbb{N}$, $0 \leq b \leq 9$)

$(10 \equiv 1 \pmod{3})$ * $a = \frac{k+1-b}{10}$

(I.H. $i=a$, $a < k+1$)

(egenskap S')

$10 \equiv 1 \pmod{9}$

*: 3 kan vara 9 också!

$$2^{29}$$

har 9 siffror, alla olika
fråga: vilken siffra saknas?

$$0 \leq d \leq 9$$

(mod 9)

alla siffror
i talet
spelar roll

① $S(2^{29}) = 45 - d$

② $2^{29} \equiv S(2^{29}) \pmod{9}$

$$\begin{aligned} 45 &= 1+2+3+\dots+9 \\ &= \frac{9 \cdot 10}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{29} &= 2^{3 \cdot 9 + 2} \\ &= (2^3)^9 \cdot 2^2 \\ &= 8^9 \cdot 2^2 \\ &\equiv (-1)^9 \cdot 4 \\ &= -4 \\ &\equiv 5 \end{aligned}$$

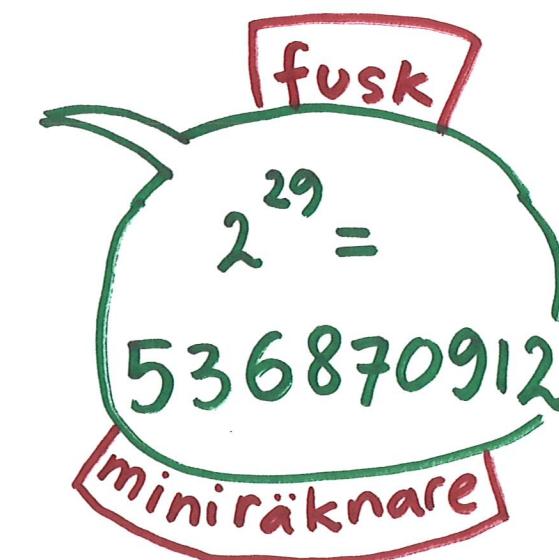
$$\equiv 45 - d \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 5 &\equiv -d \pmod{9} \\ d &\equiv 4 \pmod{9} \end{aligned}$$

$$d \equiv 4 \pmod{9}$$

d=4

$$2^3 = 8 \equiv -1 \pmod{9}$$



$$1+2+\dots+3n=$$

enkel induktion

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

↓
är mindre
användbar
än

stark induktion

$$(P(0) \wedge \dots \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1)$$

alla naturliga tal
kan primfaktoriseras

liko
starka

motsägelsebevis +
"det minsta motexemplet"

$\sqrt{2}$ inte
rationell

visa : $n \equiv S(n) \pmod{3}$ för $n \in \mathbb{N}$

bevis : mot sägelsebevis. anta att
 $N \not\equiv S(N) \pmod{3}$ och att N är det minsta
sådana motexemplet

① N kan inte bara ha en siffra, eftersom $N = S(N)$ då.

② då har vi $N = 10a + b$, $a, b \in \mathbb{N}$, $0 \leq b \leq 9$

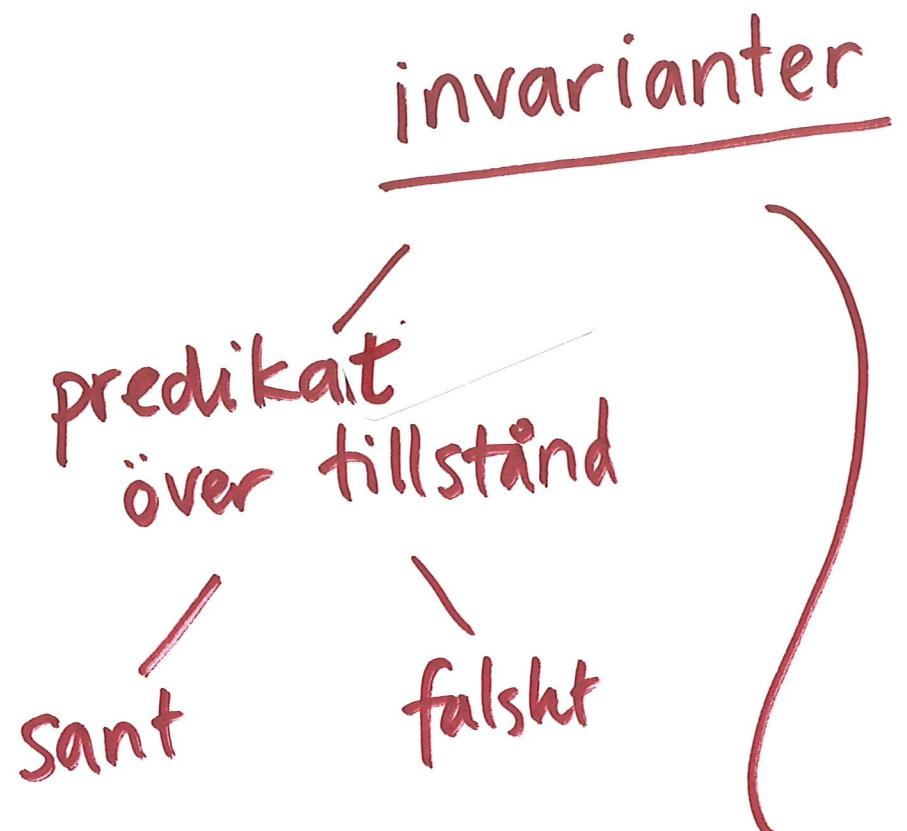
$$10a + b \not\equiv S(10a + b) \pmod{3}$$

$$10a + b \not\equiv S(a) + b \pmod{3}$$

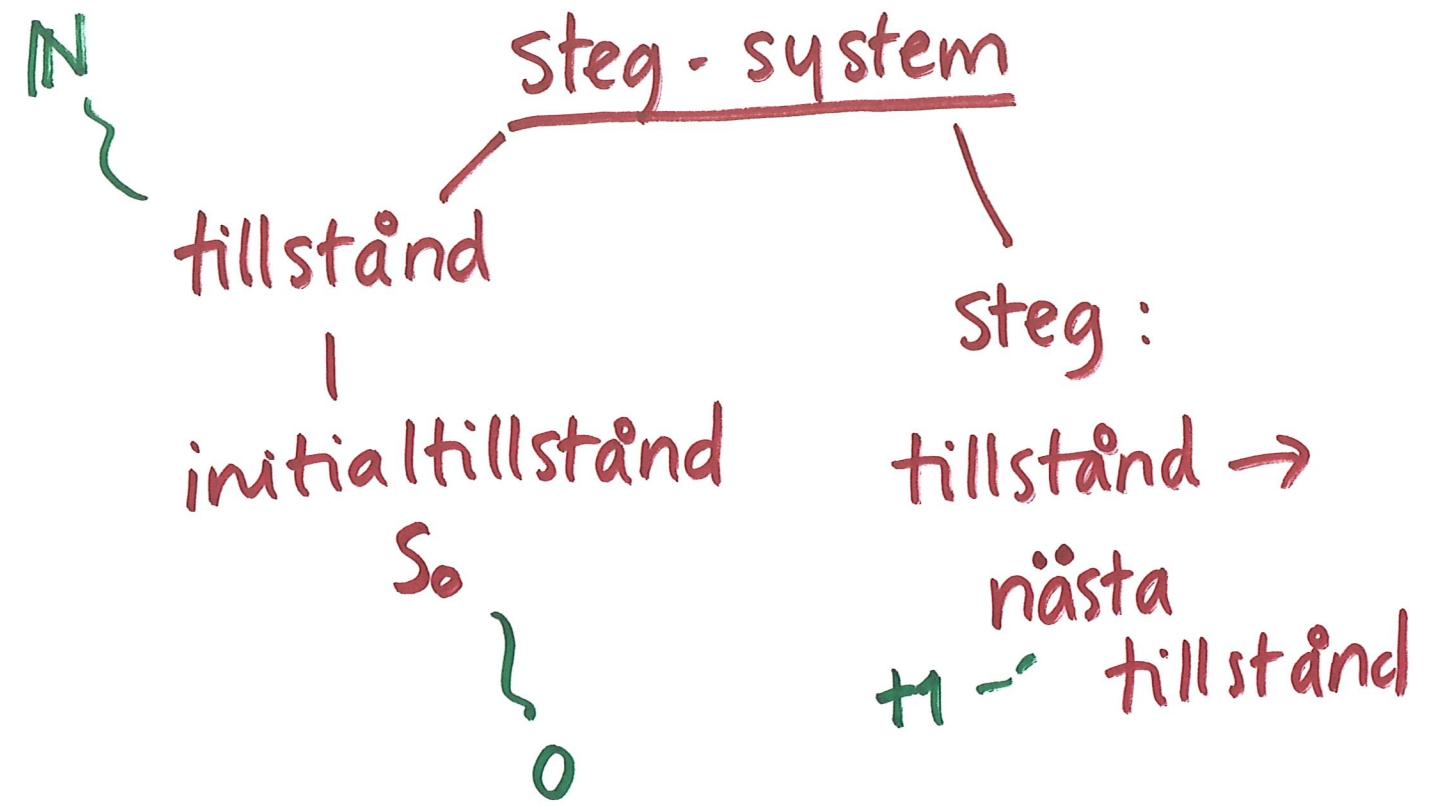
③ $10a \not\equiv S(a) \pmod{3}$

④ $a \not\equiv S(a) \pmod{3} \quad (10a \equiv a \pmod{3})$

men : $a < N$, och $a \not\equiv S(a) \pmod{3}$. OMÖJLIGT



- $P(s_0)$ sant
 - $\forall s, s' P(s) \Rightarrow P(s')$
- ↑
steg



då vet vi P måste gälla i alla tillstånd
näbara med steg från initialtillståndet s_0

(N 0 +1)
enkel induktion
exempel

Game of Life

talsekvens

Conway

"look-and-say"

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, ...

beskriv siffrorna
i den ordningen :

.. kb ..
antalet siffran

vilka
siffror
kan finnas
med?

Svar : 1, 2, 3

hitta en invariant
första försök : $P(n)$ = "n har bara
siffror 1-3"

$P(k) \Rightarrow P(k')$

?

nej : motexempel:

$P(111123)$
men $\neg P(411213)$

Låt $P(n)$ = "n innehåller bara siffror 1-3
och
n har inga uppreningar fler än 3"

$P(1)$: innehåller bara 1, inga uppreningar fler än 1. OK

$P(k) \Rightarrow P(k')$:

anta : • k innehåller bara 1-3

• k har inga uppreningar > 3

visa : k' innehåller bara 1-3

$k' = \dots n b \dots$

uppreningar i k 1-3

kommaer från k 1-3

k' inga uppreningar > 3

$k' = \dots \underline{n_1 b_1} \underline{n_2 b_2} \underline{n_3 b_3} \dots$

n_1, b_1, n_2, b_2 kan inte vara lika

b_1, n_2, b_2, n_3 kan inte vara lika

alltså, P invariant