God morgon!

$P(0)$ $\qquad$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n)$$

invarianter $\approx$ **induktion!**

vi börjar 10:00

steg-system

steg

$s \to s'$

tillstånd

s, s'

initialtillstånd

s_0

invariant

$P(s_0)$

predikat

$P(s)$

sant

falskt

"behållas" av ett steg

$P(s) \Rightarrow P(s')$

invarianten P måste gälla i alla tillstånd "nåbara" från s_0

3 exempel:

- $P(x,y)$ = "x jämn"
- $P(x,y)$ = "$x+2=y$"
- $P(x,y,s)$ = "$x \cdot y + s = a \cdot b$"

kreativ process

erfarenhet

förståelse

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

påstående. hur bevisa?

intuitivt

induktion

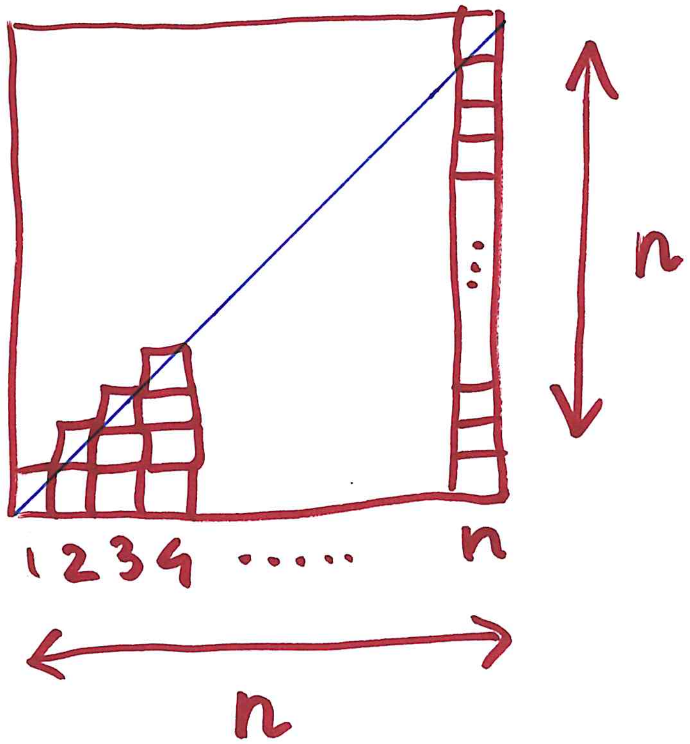
Gauss (9 år)

$1+2+3+\dots+100$?

5050

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + 100 = 101 \\ 2 + 99 = 101 \\ 3 + 98 = 101 \\ 4 + 97 = 101 \\ \vdots \\ 50 + 51 = 101 + \end{array}\right.$$

$\overline{5050}$



$$\frac{n \cdot n}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

bilder är lätta att missförstå
man kan bli lurad!

bra för att bygga intuition!

<u>induktion</u> : bevismetod som kan visa att ett predikat P är sann för <u>alla</u> <u>naturliga tal</u> .

P(n)

sant / falskt

vill visa: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n)}$

<u>om du visar</u> :

<u>basfall</u>

$P(0)$

<u>stegfall</u>

$\forall k \in \mathbb{N}.\ \big(P(k) \Rightarrow P(k+1)\big)$

steg-system

steg: $k \rightarrow k+1$

tillstånd: $\mathbb{N}$ - initialtillstånd: 0

P är invariant för detta steg-system

visa: $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, för alla $n \in \mathbb{N}$.

bevis: med induktion över n

Låt $P(n) =$ "$1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$".

basfall: $P(0)$: $\quad 0 = \dfrac{0\cdot(0+1)}{2} = 0.$ OK

stegfall: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, för $k \geq 0$

anta: $P(k)$: "$1+2+3+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$" ← "induktions-hypotes" (I.H.)

visa: $P(k+1)$: "$1+2+3+\ldots+(k+1)$" $= \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ "

$$\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+(k+1) &= \underline{1+2+3+\ldots+k} + (k+1) \\
&= \frac{k\cdot(k+1)}{2} + (k+1) \\
&= \frac{k\cdot(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k\cdot(k+1) + 2\cdot(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2} \qquad \square
\end{aligned}$$

(induktions-hypotes)

k finns med här

$P(n) \begin{cases} \text{sant} \\ \text{falskt} \end{cases}$

$P(0)$

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$\left(\cancel{P(k) \Rightarrow P(k-1)} \right)$

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	.....		
P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P

exempel: $P(n) =$ "$n \geq 0$"

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

n	$2^0+2^1+\dots+2^n$
0	1
1	3
2	7
3	15
4	31

$\vdots$

visa: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, för alla $n \in \mathbb{N}$.

bevis: med induktion över n

Låt $P(n) =$ "$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$".

basfall: $P(0)$: $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$ ok

stegfall: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, för $k \geq 0$

anta: $P(k)$: $2^0 + 2^1 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ (I.H.)

visa: $P(k+1)$: $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$

$$\begin{aligned}
2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k+1} &= \underbrace{2^0 + 2^1 + \dots + 2^k} + 2^{k+1} \qquad \text{(I.H.)} \\
&= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\
&= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\
&= 2^{k+2} - 1
\end{aligned}$$

$\square$

$$\cancel{\frac{d\,x^n}{d\,x}}$$

$$\text{diff}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

vill visa att
detta gäller
med induktion

produkt-
regeln

$$\left\{ \begin{aligned} &\text{diff}(f(x) \cdot g(x)) = \\ &\quad \text{diff}(f(x)) \cdot g(x) + f(x) \cdot \text{diff}(g(x)) \end{aligned} \right.$$

$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

visa: $\mathrm{diff}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$, för alla $n \in \mathbb{N}^+$

(ingen 0:a!)

bevis: med induktion över n

Låt $P(n) =$ " $\mathrm{diff}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$ "

basfall: $P(1)$: $\mathrm{diff}(x^1) = \mathrm{diff}(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$ **OK**

stegfall: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, för $k \geq 1$

anta: $P(k)$: $\mathrm{diff}(x^k) = k \cdot x^{k-1}$ (I.H.)

visa: $P(k+1)$: $\mathrm{diff}(x^{k+1}) = (k+1) \cdot x^k$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{diff}(x^{k+1}) &= \mathrm{diff}(x \cdot x^k) \\
&= \mathrm{diff}(x) \cdot x^k + x \cdot \mathrm{diff}(x^k) && \text{(produkt-regeln)} \\
&= \mathrm{diff}(x) \cdot x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} && \text{(I.H.)} \\
&= x^k + k \cdot x \cdot x^{k-1} \\
&= x^k + k \cdot x^k \\
&= (k+1) \cdot x^k
\end{aligned}
$$

$\square$

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$f(x,n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n=0 \\ f(x,\frac{n}{2})^2 & \text{om } n \text{ jämn}, n>0 \\ x \cdot f(x,n-1) & \text{om } n \text{ udda} \end{cases}$$

<u>vill visa</u>

$f(x,n) = x^n$, för alla $n \in \mathbb{N}$

power ?
i Haskell?

induktion? $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ – kommer inte fungera ☹