induktion

kursrepresentanter

~3 studenter

koen@chalmers.se

power2 $(x, n) = x^n$

exempel

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n=0 \\ 1 & \text{om } n=1 \\ f(n-1)+f(n-2) & \text{om } n \geq 2 \end{cases}$$

Fibonacci rekursiv funktion

$f(0) = 1$

$f(1) = 1$

$f(2) = 2$

$f(3) = 3$

$f(4) = 5$

$f(5) = 8$

$\vdots$

vill visa: $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(n) \leq 2^n$

induktion?

visa: $f(n) \leq 2^n$, för alla $n \in \mathbb{N}$

bevis: med induktion över n

Låt $P(n) =$ "$f(n) \leq 2^n$".

Basfall: $P(0)$: $f(0) = 1 \leq 2^0$ ok.

stegfall: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, för $k \geq 0$

anta: $P(k)$: $f(k) \leq 2^k$ (I.H.)

visa: $P(k+1)$: $f(k+1) \leq 2^{k+1}$

$f(k+1)$

$k=0$:

$f(1) = 1 \leq 2^1$

OK!

$k>0$:

$$f(k+1) = \underbrace{f(\overset{k+1-1}{k})}_{\leq 2^k \text{ (I.H.)}} + \underbrace{f(\overset{k+1-2}{k-1})}_{???}$$

FASTNAT

:(

$P(n)$ sant / falskt

- $P(0)$
- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

enkel induktion

						k	k+1		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	.....
P	P	P	P	P	P	P			

$P(7)$?

- $P(0)$
- $(P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1)$

stark induktion

$f(n-2) \quad f(n-1) \quad f(n)$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

visa : $f(n) \leq 2^n$, för alla $n \in \mathbb{N}$

bevis : med stark induktion över n

Låt $P(n) =$ " $f(n) \leq 2^n$ ".

basfall : $P(0) = f(0) = 1 \leq 2^0$ **OK**

basfall : $P(1) = f(1) = 1 \leq 2^1$ **OK**

stegfall : $(P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1)$, för $k \geq 1$

anta : $P(i)$: $f(i) \leq 2^i$, för $0 \leq i \leq k$ (I.H.)

visa : $P(k+1)$: $f(k+1) \leq 2^{k+1}$

$$
\begin{aligned}
f(k+1) &= f(k) + f(k-1) \\
&\leq 2^k + 2^{k-1} \quad \text{(I.H. } i=k \text{ och } i=k-1\text{)} \\
&\leq 2^k + 2^k \\
&= 2 \cdot 2^k \\
&= 2^{k+1}
\end{aligned}
$$

$\square$

intermezzo

"likhetsresonemang" $A = B$

$$
\begin{aligned}
A &= A_2 && \text{(varför)} \\
&= A_3 && \text{(varför)} \\
&= A_4 && \text{(I.H.)} \\
&\;\vdots \\
&= B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= B \\
&\vdots \\
A_2 &= B_2 \\
A_3 &= B_3 \\
&\vdots \\
A_{10} &= A_{10}
\end{aligned}
$$

<u>ok</u>

"olikhetsresonemang" $A \leq B$

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 && \text{(varför)} \\
&= A_2 && \text{(varför)} \\
&\leq A_3 \\
&= A_4 && \vdots \\
&\leq A_5 \\
&= A_6 && \text{(varför)} \\
&= B && \vdots
\end{aligned}
$$

$$A \leq B$$

$$A_1 \leq B_1$$

$$A_2 \leq B_2$$

$$\vdots$$

$$A_{10} \leq A_{10}$$

OK

väldigt lätt att göra fel

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$f(x,n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n=0 \\ f(x,\frac{n}{2})^2 & \text{om } n \text{ jämn}, n>0 \\ x \cdot f(x,n-1) & \text{om } n \text{ udda} \end{cases}$$

<u>vill visa</u>

$f(x,n) = x^n$, för alla $n \in \mathbb{N}$

power? i Haskell?

induktion? $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ – kommer inte fungera ☹

visa: $f(x,n) = x^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

bevis: med **stark** induktion över n

Låt $P(n) =$ " $f(x,n) = x^n$ "

basfall: $P(0)$: $f(x,0) = 1 = x^0$ **OK**

stegfall: $(P(0) \wedge \cdots \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1)$, för $k \geq 0$

anta: $P(i)$: $f(x,i) = x^i$, för $0 \leq i \leq k$ (I.H.)

visa: $P(k+1)$: $f(x,k+1) = x^{k+1}$

falluppdelning: $\boxed{k+1 \text{ jämn}}$

$$f(x,k+1) = f\left(x, \frac{k+1}{2}\right)^2 \quad \text{(def. f)}$$

$$= \left(x^{\frac{k+1}{2}}\right)^2 \quad \left(\text{I.H. } i = \frac{k+1}{2}\right)$$

$$0 \leq \frac{k+1}{2} \leq k$$

$$= x^{k+1}$$

$\boxed{k+1 \text{ udda}}$

$$f(x,k+1) = x \cdot f(x,k) \quad \text{(def. f)}$$

$$= x \cdot x^k \quad (\text{I.H. } i = k)$$

$$= x^{k+1}$$

$\square$

summor — aritmetiska

summor — geometriska

(ett exempel till
stark induktion)

$$B \cdot (x+y) = B \cdot x + B \cdot y$$

aritmetisk summa

$$5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11 + 14 + 17 \xrightarrow{+3} 20 = \dots ?$$

$$5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 = \dots ?$$

5

början

$$\underset{i=0}{A} + \underset{i=1}{(A+B)} + \underset{i=2}{(A+B+B)} + \underset{i=3}{(A+B+B+B)} + \dots$$

n+1 stycken A

$$= \sum_{i=0}^{n} (A + i \cdot B) = (n+1) \cdot A + \sum_{i=0}^{n} i \cdot B$$

"bryta ut" B

$$= (n+1) \cdot A + B \cdot \sum_{i=0}^{n} i$$

igår

$$= (n+1) \cdot A + B \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

notation

lär inte utantill!

geometrisk summa

$$5 \overset{\cdot 2}{+} 10 \overset{\cdot 2}{+} 20 \overset{\cdot 2}{+} 40 + \dots + 80 \overset{\cdot 2}{+} 160 = \;?$$

börja

$$5 - \underset{i=0}{A} + \underset{i=1}{A \cdot B} + \underset{i=2}{A \cdot B \cdot B} + \underset{i=3}{A \cdot B \cdot B \cdot B}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} A \cdot B^i} = A \cdot \sum_{i=0}^{n} B^i \;?$$

$\left(\text{igår: } \sum_{i=0}^{n} 2^i\right)$

idé:

"teleskop"

$$S = B^0 + \cancel{B^1} + \cancel{B^2} + \cancel{\dots} + \cancel{B^n}$$

$$B \cdot S = \cancel{B^1} + \cancel{B^2} + \cancel{B^3} + \cancel{\dots + B^n} + B^{n+1}$$

$$B \cdot S - S = B^{n+1} - B^0$$

$$(B-1) \cdot S = B^{n+1} - 1$$

$$\boxed{S = \frac{B^{n+1} - 1}{B - 1}}$$

$$\boxed{A \cdot \frac{B^{n+1} - 1}{B - 1}}$$

<u>visa</u>: $\sum_{i=0}^{n} B^i = \frac{B^{n+1}-1}{B-1}$, för $n \in \mathbb{N}$, $B \neq 1$, $B \neq 0$

<u>bevis</u>: med induktion över n

Låt $P(n) =$ " $\sum_{i=0}^{n} B^i = \frac{B^{n+1}-1}{B-1}$ " .

<u>basfall</u>: $P(0)$: $B^0 \underset{B \neq 0}{=} 1 \underset{B \neq 1}{=} \frac{B^1-1}{B-1}$ <u>OK</u>

<u>stegfall</u>: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ för $k \geq 0$

<u>anta</u>: $P(k)$: $\sum_{i=0}^{k} B^i = \frac{B^{k+1}-1}{B-1}$ (I.H.)

<u>visa</u>: $P(k+1)$: $\sum_{i=0}^{k+1} B^i = \frac{B^{k+2}-1}{B-1}$

$$\sum_{i=0}^{k+1} B^i = \left(\sum_{i=0}^{k} B^i\right) + B^{k+1} \overset{(I.H.)}{=} \frac{B^{k+1}-1}{B-1} + B^{k+1} = \frac{B^{k+1}-1}{B-1} + \frac{B^{k+1}(B-1)}{B-1}$$

$$= \frac{\cancel{B^{k+1}} - 1 + B^{k+2} - \cancel{B^{k+1}}}{B-1} = \frac{B^{k+2}-1}{B-1} \quad \square$$

$0^0 = 1$?

$\neq 0$?

$0^x = 0$

$x^0 = 1$

$0^0 = ?$

obestämt

$0^0 = 1$