DIT980

God morgon!

vi börjar 10:00

Logik

utsaga: sant/falskt

konnektiv: $\wedge \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \neg \quad \Leftrightarrow$ (sanningstabeller)

hur prata om t.ex. naturliga tal
heltal
osv. ?

predikat: $P(x)$, $Q(x,y)$, $R(x,y)$

utsaga om något ännu okänt
$(x, y, \dots)$

"$x < y$" "$<$" är ett predikat

exempel

$P(x) =$ "x är ett jämt tal"

$Q(x,y) =$ "x är större än y" "$x > y$"

sant falskt

beroende på x och y

ett predikat med inga argument är en vanlig primitiv utsaga

kvantifierare (quantifier) (kvantor, kvantifikator)

$$\forall x \in \underbrace{\mathbb{N}} \, . \, \boxed{x \geq 0}$$

kvantifierare
$\forall$ - "för alla"

variabel

var kommer variabeln ifrån?

vad gäller för x

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{Z} \, . \; x \text{ är jämn}}$$ — falskt

"för alla" punkt

$$\forall x \in \underbrace{A}_{\text{vilken mängd}} . \underbrace{P(x)}_{\text{vad gäller?}}$$

variabel

punkt

$$\exists x \in \underbrace{A}_{\text{vilken mängd}} . \underbrace{P(x)}_{\text{vad gäller}}$$

"det finns"
1 eller fler

variabel

$\forall$ - universell kvantifierare

$\exists$ - existentiell kvantifierare

sant

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{Z} . \ x \text{ är jämn}}$$

$\forall x \in \mathbb{N} . \exists y \in \mathbb{N} . \ y > x$

för alla x, finns det y, där $y > x$

sant

"gäller"

$$\boxed{\exists y \in \mathbb{N} . \ \forall x \in \mathbb{N} . \ y > x}$$

"sådant att"

falskt

<u>exempel</u> : $f: A \to B$

f injektiv : $\forall x \in A.\ \forall y \in A.\ (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

$\forall x, y \in A.\ (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

f surjektiv : $\forall y \in B.\ \exists x \in A.\ f(x) = y$

varför gör vi detta?

entydigt

hjälper resonemang

visa att det är sant

visa att det är falskt

	bevis	motbevis
$A \wedge B$	bevisa A <u>och</u> bevisa B	motbevisa A <u>eller</u> motbevisa B
$A \vee B$	bevisa A <u>eller</u> bevisa B	motbevisa A <u>och</u> motbevisa B
$\neg A$	motbevisa A	bevisa A
$A \Rightarrow B$	anta att A gäller, bevisa B	visa att A är sann motbevisa B

	bevis	motbevis
$\forall x \in A . P(x)$	för ett generellt argument för $P(x)$, för godtyckligt $x \in A$	hitta ett $x \in A$ motbevisa $P(x)$
$\exists x \in A . P(x)$	hitta ett $x \in A$ bevisa $P(x)$	för ett generellt argument mot $P(x)$ för godtyckligt x

exempel 1

$$\forall x \in \mathbb{N}. \; (x > 3 \Rightarrow x > 7)$$

motbevis: ta $x=5$ då har vi $x>3$

$\neg(x>7)$

exempel 2

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$f(x) = x^2$

f injektiv?

motbevisa

$\forall x, y \in A. \; (f(x)=f(y) \Rightarrow x=y)$

ta $x=3$, $y=-3$

$f(x)=f(y)$ sant

$x=y$ falsht

exempel ③

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $\quad$ f surjektiv

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , x \text{ jämn} \\ -\frac{x+1}{2} & , x \text{ udda} \end{cases}$$

$f(0)=0$ $\quad$ $f(1)=-1$
$f(2)=1$ $\quad$ $f(3)=-2$
$f(4)=2$ $\quad$ $f(5)=-3$
$f(6)=3$ $\quad$ $f(7)=-4$
$\vdots$ $\quad$ $\vdots$

visa: $\forall y \in \mathbb{Z} . \exists x \in \mathbb{N} . f(x)=y$

bevis: ta ett godtychligt $y \in \mathbb{Z}$.

falluppdelning:

$y \geq 0$: ta $x = 2 \cdot y$. $f(x) = f(2 \cdot y) = \frac{2 \cdot y}{2} = y$. OK!

$y < 0$: ta $x = -2 \cdot y - 1$. $f(x) = f(-2y-1) = -\frac{(-2y-1)+1}{2} = -\frac{-2y}{2} = y$. OK!

$\pi \notin \mathbb{Q}$

$e \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$r = \sqrt{2}$?

$\boxed{\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}}$?

sant

OK!

falskt

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$

låt $r = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} =$

$\sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} =$

$\sqrt{2}^{2} =$

$2 \in \mathbb{Q}$

kladd

visa: $\exists r \in \mathbb{R}.\,(r \notin \mathbb{Q} \wedge r^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q})$

bevis: fallupp delning

fall 1: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$: Ta $r = \sqrt{2}$. Vi vet $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Vi vet $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. OK!

fall 2: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$: Ta $r = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Vi vet $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2 \in \mathbb{Q}.$$

OK!

$\square$