Några exempel på bevis och motbevis

Dan Rosén

danr@chalmers.se

1 Att bevisa ett universellt kvantifierat påstående

Exempel: alla naturliga tal antingen är noll, eller blir strikt större vid addition med sig själv:

$$\forall\, x \in \mathbb{N} : (x = 0 \;\vee\; x + x > x)$$

Bevis Motsägelsebevis. Anta motsatsen. Vi negerar hela formeln och antar den:

$$\begin{array}{ll} & \neg\forall\, x \in \mathbb{N} : \quad (x = 0 \quad \vee \quad x + x > x) \\ \Leftrightarrow (\textit{regeln för negation av kvantifierare}) & \exists\, x \in \mathbb{N} : \;\neg(x = 0 \quad \vee \quad x + x > x) \\ \Leftrightarrow (\textit{de Morgan}) & \exists\, x \in \mathbb{N} : (\neg(x = 0) \;\wedge \neg(x + x > x)) \\ \Leftrightarrow (\textit{notation}) & \exists\, x \in \mathbb{N} : (\quad x \neq 0 \quad \wedge \quad x + x \leqslant x \;) \end{array}$$

Alltså har vi ett $x \in \mathbb{N}$ som uppfyller $x \neq 0$ och $x + x \leqslant x$. Vi subtraherar den sista olikheten med x på båda sidor och får $x \leqslant 0$. Eftersom $x \neq 0$ innebär detta att $x < 0$, men det är en motsägelse eftersom alla naturliga tal är icke-negativa.

□

2 Att motbevisa ett universellt kvantifierat påstående

Exempel: varje tal är lika med kvadraten av sig själv:

$$\forall\, x \in \mathbb{N} : (x \cdot x = x)$$

Motbevis Vi antar att det är sant och vill härleda en motsägelse. Om det är sant gäller påståendet för alla x. Då gäller det exempelvis när $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, osv... Det är som en hel uppsättning av sanningar:

$$\begin{array}{l} 0 \cdot 0 = 0 \; (\textit{med } x = 0) \\ 1 \cdot 1 = 1 \; (\textit{med } x = 1) \\ 2 \cdot 2 = 2 \; (\textit{med } x = 2) \\ 3 \cdot 3 = 3 \; (\textit{med } x = 3) \\ \ldots \end{array}$$

Vi behöver bara visa att någon av dem leder till en motsägelse.

Vi låter $x = 2$ och får vi att $2 \cdot 2 = 2$, men $4 \neq 2$ så vi har en motsägelse!

□

3 Att bevisa ett existentiellt kvantifierat påstående

Exempel: Det finns två tal vars summa är 10:

$$\exists\, x \in \mathbb{N} : \exists\, y \in \mathbb{N} : x + y = 10$$

Bevis Med ett exempel: Vi har att $3+7 = 10$, så $x = 3$ och $y = 7$ är ett exempel.

Ett annat exempel: Ekvationen $a^b = b^a$ har icke-triviala lösningar:

$$\exists\, a \in \mathbb{N} : \exists\, b \in \mathbb{N} : (a > 1 \ \land \ b > 1 \ \land \ a^b = b^a)$$

Bevis Med ett exempel: Vi har att $2^4 = 4^2 = 16$, och både 2 och 4 är > 1.

□

4 Att motbevisa ett existentiellt kvantifierat påstående

Exempel: Det finns något naturligt som ger summan 10 oavsett vilket annat naturligt tal man adderar det med:

$$\exists\, x \in \mathbb{N} : \forall\, y \in \mathbb{N} : x + y = 10$$

Motbevis Vi antar att det är sant. Alltså har vi ett $x \in \mathbb{N}$ som uppfyller:

$$\forall\, y \in \mathbb{N} : x + y = 10$$

Precis som förut innebär det här många sanningar, tex när $y = 0$, $y = 1$, ... $y = x$, $y = x + 1$ osv:

$$\begin{array}{ll} x + 0 = 10 & (med\ y = 0) \\ x + 1 = 10 & (med\ y = 1) \\ \ldots & \\ x + x = 10 & (med\ y = x) \\ x + (x+1) = 10 & (med\ y = x + 1) \\ \ldots & \end{array}$$

Om vi tittar på de två första raderna har vi att $x + 0 = 10$ och $x + 1 = 10$. Tillsammans ger de att $x = 10$ och $x = 9$, och således att $9 = 10$. En motsägelse! □

Det finns andra sätt att hitta en motsägelse. Exempelvis kan vi låta $y = 11$. Då får vi att $x + y = x + 11 = 10$, som ger att $x = -1$, vilket är en motsägelse eftersom $x \in \mathbb{N}$.

5 Övningar

Bevisa eller motbevisa:

1) $\forall\, x \in \mathbb{N} : (x + x > x)$

2) $\forall\, x \in \mathbb{N} : (x = 0 \ \lor \ x \cdot x > x)$

3) $\forall\, x \in \mathbb{N} : (x = 0 \ \lor \ x = 1 \ \lor \ x \cdot x > x)$

4) $\exists\, x \in \mathbb{N} : x \cdot x = x$

5) $\exists\, x \in \mathbb{N} : (x \cdot x = x \ \land \ x \geqslant 2)$

6) $\exists\, x \in \mathbb{N} : \forall\, y \in \mathbb{N} : x \cdot y = x + y$