Kapitel 2

Mängdlära

2.1 Mängder

Vi har redan stött på begreppet mängd. Med en *mängd* menar vi en *väldefinierad* samling av objekt eller *element*. Ordet ”väldefinierad” syftar på att man för varje tänkbart objekt x otvetydigt skall kunna avgöra om x hör till mängden eller ej. Att bara säga att en mängd är en samling element är inte så problemfritt som man skulle kunna tro; vad som ser ut att vara en mängd kan istället vara en paradox på samma sätt som ”påståendet” ”detta påstående är falskt” är en paradox och inte en logisk utsaga. Ett problem ligger i att elementen i en mängd själva kan vara mängder. Ibland kan en mängd till och med vara ett element i sig själv. Man kan till exempel tänka sig mängden av alla mängder. Med detta som grund kan man skapa paradoxer. Bilda till exempel ”mängden” A som mängden av alla mängder som inte är element i sig själva. Mer precist: A är mängden som består av alla mängder B som är sådana att B inte är ett element i B. Låt oss nu fråga oss om A själv är ett element i A. Då får vi en paradox: Om A inte tillhör A, så följer att A tillhör A per definition av A. Om A tillhör A, så följer att A inte tillhör A av samma skäl. Paradoxer av denna typ utvecklades under senare delen av 1800-talet av den italienske logikern Burali-Forti och senare också av Bertrand Russell. Detta påkallade en utveckling av mängdläran som ett axiomatiskt system där paradoxer undviks. Det finns flera olika sådana system: Zermelo-Fraenkel-von Neumann-systemet, Gödel-Hilbert-Bernay-systemet, Russell-Whitehead-systemet. Vi går i den här framställningen inte in på något av detta utan sopar problemet med en rigorös definition av mängdbegreppet under mattan genom att helt enkelt säga att en mängd är en *väldefinierad* samling element. Vi kommer inte att stöta på problem på grund av detta.

Mängdläran kan, liksom logiken, egentligen inte sägas vara en del av matematiken utan är, också liksom logiken, en förutsättning för matematiken. De är båda en del av matematikens struktur och språk. Vi har redan sett att mängdbegreppet dyker upp i en del av matematikens axiom.

Det enklaste sättet att ange en (inte alltför stor) mängd är att helt enkelt lista deras element inom klamrar. Exempelvis är $\{1, 2, 3\}$ mängden som har talen 1, 2 och 3 som element, medan {Maria, Anna, Peter, Göran} är mängden som har namnen Maria, Anna, Peter och Göran som element. Mängder är dock ofta stora eller till och med oändliga och då brukar man ange dem genom att utnyttja ett mönster eller helt enkelt tala om vilka element mängden har. Exempelvis kan mängden $\mathbb{Z}_+$ av alla positiva heltal anges som

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

eller helt enkelt bara som just ”mängden av positiva heltal”. Ett annat exempel är mängden av bokstäver i det svenska alfabetet som vi kan ange som

$$\{\text{a,b,c,}\ldots\text{,z,å,ä,ö}\}.$$

Ett tredje exempel är mängden av alla svenska medborgare, en mängd som knappast kan anges på annat sätt. I dessa exempel ser vi mängder som anges av att deras element har en viss egenskap, E. Ett annat sätt att skriva en sådan mängd är $\{x : x \text{ har egenskapen } E\}$. Som exempel kan vi ta att $\mathbb{Z}_+ = \{x : x \text{ är ett positivt heltal}\}$.

Man brukar använda versaler A, B, C etc som namn på mängder. Om x är ett element i mängden A så skriver man

$$x \in A$$

vilket utläses som att ”x tillhör A”. Om x inte är ett element i A så skriver man $x \notin A$ (d. v. s. $x \notin A$ är ekvivalent med $\neg[x \in A]$). För att koppla ihop detta med logiken noterar vi att $x \in A$ är ett predikat,

d. v. s. för varje objekt x gäller att $x \in A$ är ett påstående med ett väldefinierat sanningsvärde.

Exempel. Det finns ett antal talmängder som används ofta i matematiken och som därför fått vedertagna och fasta beteckningar som är bra att känna till. Vi kommer att använda dem flitigt framöver. Här följer en lista över de viktigaste:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R} &= \text{mängden av reella tal}, \\
\mathbb{C} &= \text{mängden av komplexa tal}, \\
\mathbb{Q} &= \text{mängden av rationella tal}, \\
\mathbb{Z} &= \text{mängden av heltal} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}, \\
\mathbb{Z}_+ &= \text{mängden av positiva heltal} = \{1, 2, 3, \ldots\}, \\
\mathbb{N} &= \text{mängden av naturliga tal} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \\
\emptyset &= \text{ den tomma mängden} = \{\}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Vi avslutar avsnittet med en praktisk beteckning. Om A är en ändlig mängd så betecknar man antalet element i A med $|A|$. Utsagan att A är en oändlig mängd kan man då kort skriva $|A| = \infty$. Observera också i det här sammanhanget att ett element kan inte "finnas med flera gånger" i en mängd, så att t. ex. är $|\{1, 2, 3, 2, 1\}| = 3$.

2.2 Delmängder

Definition. Om A och B är mängder sådana att det för alla x gäller att $x \in A \Rightarrow x \in B$, så säger vi att A är en *delmängd* av B och att A är *innehållen* eller *inkluderad* i B och vi skriver

$$A \subseteq B.$$

Om det både gäller att $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$, så säger vi att $A = B$. Om A är en delmängd av B och $A \neq B$, så säger man att A är en *äkta* delmängd av B och skriver $A \subset B$.

Anmärkning. Av definitionen för delmängd så följer det att $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$, d. v. s. $A = B$, om och endast om det för alla x gäller att

$x \in A \Rightarrow x \in B$ och $x \in B \Rightarrow x \in A$. Med andra ord så är $A = B$ om och endast om $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

I en del böcker betecknar symbolen '$\subset$' delmängd och inte äkta delmängd, så man bör vara lite uppmärksam på vad som avses. $\square$

Hur gör man då för att visa att en mängd A är en delmängd i en annan mängd B? Jo, man kan använda definitionen direkt genom att ta ett godtyckligt element i A och sedan visa att det också finns i B.

Exempel. Vi använder talmängderna i exemplet ovan till att illustrera delmängdsbegreppet. Först ser vi att $\emptyset \subseteq A$ för alla mängder A, eftersom $x \in \emptyset$ aldrig är uppfyllt så $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ oavsett vad A är. Sedan inser vi att vi har följande inklusioner:

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Att $\mathbb{Q}$ är en äkta delmängd till $\mathbb{R}$ är inte självklart. Det är inte uppenbart att det finns reella tal som inte kan skrivas som kvoten mellan två heltal. Mot slutet av kapitel 7 om heltalen kommer vi att kunna visa detta. $\square$

Man har ofta anledning att betrakta speciella delmängder av de reella talen, nämligen *intervall*. Ett intervall är mängden av tal mellan något minsta värde och något största värde. Beroende på om man menar att de två gränspunkterna ska ingå i intervallet eller inte formuleras detta på olika sätt: Låt a och b vara två reella tal sådana att $a \leq b$. Vi definierar då ett slutet intervall $[a, b]$ som mängden

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

och ett öppet intervall (a, b) som mängden

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Med andra ord: Hakparentes betyder ”ta med gränspunkten” medan vanlig parentes betyder ”ta inte med gränspunkten”. Med den principen kan man också konstruera de varianter där den ena gränspunkten finns med men inte den andra, d. v. s.

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \text{ och } (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

Andra intervall är sådana som bara är begränsade åt ena hållet:

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \text{ och } [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\},$$

vilka också förstås förekommer med vanlig parentes vid a'et med precis den betydelse man tror.

I många sammanhang är det naturligt att se de mängder man arbetar med som delmängder till något universum, U. Om till exempel K är mängden av konsonanter i det svenska alfabetet och V är mängden av vokaler är det naturligt att se dessa som delmängder av mängden U av alla bokstäver. Om man arbetar med mängderna $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ och $\mathbb{Q}$ är det naturligt att se dessa som delmängder av mängden $U = \mathbb{R}$. I fortsättningen kommer vi alltid att se mängder som delmängder till ett universum.

2.3 Mängdoperatorer

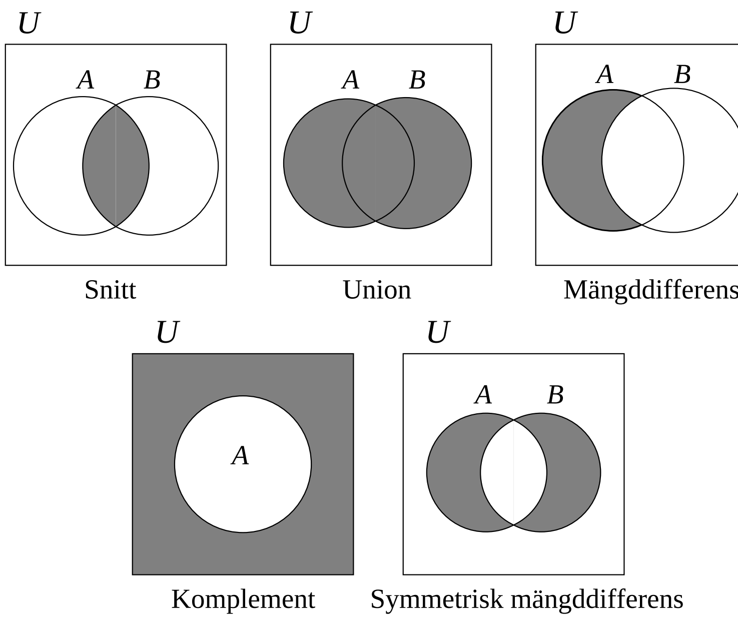
Precis som inom logiken så finns det ett antal operatorer på mängder. Som vi kommer att se så finns det ett mycket intimt samband mellan logikoperatorerna och mängdoperatorena. Låt A och B vara två delmängder till ett universum U. Vi definierar följande mängdoperatorer:

- Snitt: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$,
- Union: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$,
- Mängddifferens: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$,
- Komplement: $A^c = U \setminus A$,
- Symmetrisk mängddifferens: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Ett annat ord för ”snitt” är ”skärning”. För att ordentligt ta till sig vad olika mängdoperatorer verkligen innebär har man mycket hjälp av illustrationer, så kallade *Venndiagram*. I figur 2.1 illustreras de ovan definierade mängdoperatorerna; de skuggade områdena anger resultatet av respektive operator.

Några viktiga räkneregler för mängdoperatorerna ges i tabellen nedan. Jämför denna med tabellen på sidan 18 med räkneregler för de logiska operatorerna. De påminner en del om varandra, eller hur?

Alla räkneregler i tabellen utom den sista, $A \setminus B = A \cap B^c$, har en motsvarande regel i tabellen på sidan 18. För att bevisa räknereglerna för



Figur 2.1: De olika mängdoperatorerna.

mängdoperatorer så kan man utnyttja dess motsvarighet i logiktabellen. Dessa har vi ju redan bevisat så de kan vi använda för att visa nya satser. Vi bevisar den första av deMorgans lagar, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, och lämnar de övriga som har en motsvarande regel i tabellen på sidan 18 som övning. Alla bevisen följer exakt samma mönster.

Vi påminner först om att för att visa $(A \cap B)^c A^c \cup B^c$, så gäller det att visa att $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$ för alla x. Låt x vara ett godtyckligt element i ett universum U. Genom att utnyttja definitionerna av mängdoperatorerna och den första av deMorgans lagar för de logiska operatorerna så får vi:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

Eftersom x var godtyckligt valt så gäller slutsatsen för alla x och det är därmed bevisat att $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Tabell 2.1: Räkneregler inom mängdläran.

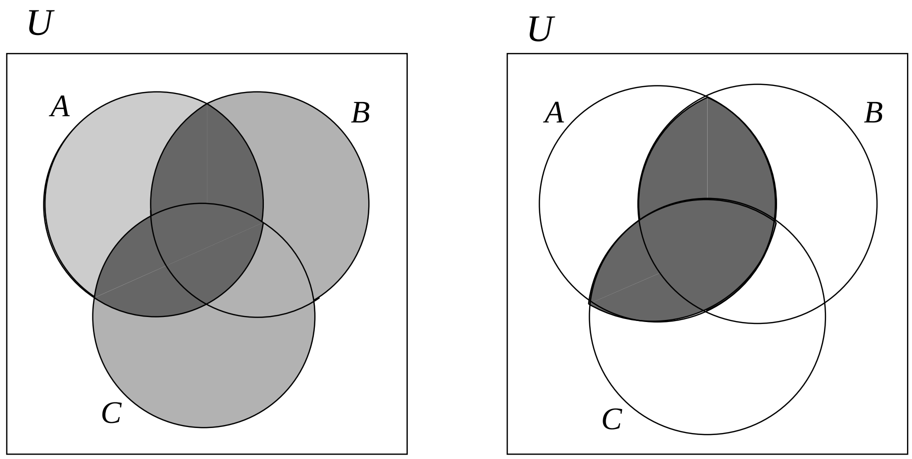
Regel	Namn
$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$	identitet
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	dominans
$A \cup A^c = U$ $A \cap A^c = \emptyset$	
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	idempotens
$(A^c)^c = A$	dubbelt komplement
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	kommutativitet
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	associativitet
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributivitet
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	deMorgan
$A \setminus B = A \cap B^c$	

Den sista räkneregeln i tabellen har ingen direkt motsvarighet eftersom vi inte definierat någon motsvarande logisk operator för mängddifferens. Vi ger därför ett bevis också av denna. Vi ska visa att $A \setminus B = A \cap B^c$, d. v. s. $x \in A \setminus B$ om och endast om $x \in A \cap B^c$ för alla x. Villkoret $x \in A \setminus B$ betyder per definition $x \in A \wedge x \notin B$. Eftersom $x \notin B$ per definition av komplement betyder $x \in B^c$ så är detta ekvivalent med $x \in A \wedge x \in B^c$. Detta i sin tur är just betydelsen av $x \in A \cap B^c$. Eftersom x var ett godtyckligt valt element så gäller för alla x att $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \cap B^c$. Därmed är det bevisat att $A \setminus B = A \cap B^c$.

Innan man börjar försöka bevisa (eller ge motexempel till) ett påstående om att två mängduttryck är lika är det en god idé att övertyga sig själv om att påståendet är korrekt (eller felaktigt). Det är då en god hjälp att konstruera två Venndiagram där man ritar den vänstra mängden i det ena Venndiagrammet och den högra i det andra. Om de två bilderna visar sig illustrera samma mängd är detta åtminstone en god indikation på att påståendet är korrekt, medan två bilder som visar på olika mängder i sig utgör ett motexempel mot påståendet. I figur 2.2 illusteras den andra av de distributiva lagarna i tabellen på sidan 48. Den vänstra bilden har A och $B \cup C$ ljust skuggade, medan $A \cap (B \cup C)$ är mörkt skuggad. På den högra sidan är mängden $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ mörkt skuggad. Man ser att de mörkt skuggade mängderna på de bägge bilderna stämmer överens. Alltså verkar det som om att den påstådda likheten är korrekt.

Det är frestande att också tro att om den påstådda likheten gäller för bilderna så gäller den också generellt, men tyvärr är bilderna bara ett exempel på hur de ingående mängderna skulle kunna se ut, medan påståendet gäller för *alla* tänkbara ingående mängder. Ett rigoröst bevis måste bestå av observationer som gäller oavsett hurdana de involverade mängderna råkar vara. Därför är ett bevis där man enbart använder definitionen av operatorerna och logik definitivt att föredra om man vill känna att man har helt torrt under fötterna. Bevis som bara utnyttjar bilder ska man alltid vara kritisk till. Bilder är utmärkta som illustration, men det är lätt att låta sig luras av en bild. Logiska argument kan man däremot alltid kontrollera om de är korrekta.

En ytterligare mängdoperator som vi kommer att få anledning att använda oss av är den s. k. *kartesiska produkten* av två mängder: Låt A och B vara mängder. Då är den kartesiska produkten, $A \times B$, den



Figur 2.2: Den fjärde likheten från slutet i tabellen på sidan 48 illustrerad med hjälp av Venndiagram.

mängd som har som element alla ordnade par (a, b) sådana att $a \in A$ och $b \in B$. Med andra ord

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Termen *ordnat par* betyder helt enkelt att ordningen spelar roll, så att $(a, b) = (c, d)$ om och endast om $a = c$ och $b = d$. Till exempel är $(0, 1) \neq (1, 0)$.

Exempel. 1. Talplanet $\mathbb{R}^2$ är den kartesiska produkten

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

2. Om $A = \{\text{Nils, Roy}\}$ och $B = \{\text{Anna, Sofie}\}$, så är

$$A \times B = \{(\text{Nils,Anna}),\ (\text{Nils,Sofie}),\ (\text{Roy,Anna}),\ (\text{Roy,Sofie})\}$$

$\square$

Observera i det första exemplet att man skiljer på paret (x, y) och paret (y, x); de svarar ju mot olika punkter i planet. En konsekvens av detta är att man i allmänhet måste skilja på paren (a, b) och (b, a). Speciellt om A och B är olika mängder, så blir $A \times B$ och $B \times A$ olika mängder.

Innan vi lämnar detta kapitel bör vi slutligen känna till potensmängden, $\mathcal{P}(A)$, som är *mängden av alla delmängder till A*. Det här är det första exempel vi stöter på där en mängd har element som själva är mängder. Detta är inget som bör skrämma oss; att mängder är element i en mängd är inte konstigare än att bilar eller människor eller tal är det.

Exempel. 1. Om $A = \{1, 2, 3\}$ så är

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

2. Om $B = \{\text{banan, äpple}\}$ så är

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset,\ \{\text{banan}\},\ \{\text{äpple}\},\ \{\text{banan,äpple}\}\}.$$

$\square$

I samband med detta är det på sin plats att påpeka att mängder som bara innehåller ett enda element inte ska sammanblandas med elementet självt. Se till exempel på det första exemplet. I $\mathcal{P}(A)$ finns mängden $\{1\}$ med som element, men detta betyder inte att talet 1 finns som element i denna mängd; talet 1 är inte samma sak som mängden $\{1\}$. En bra liknelse är observationen att ”en låda som innehåller en hatt är inte samma sak som en hatt”.

Låt oss observera att om A är en ändlig mängd med n element, d. v. s. $|A| = n$, så innehåller $\mathcal{P}(A)$ precis 2^n element. Detta följer av att om man ska välja ut en delmängd B till A så har man för varje element $a \in A$ två val; ta med a i B eller ta inte med a i B. Eftersom man har detta val för varje a i A betyder det när man går igenom elementen i A finns det totalt 2^n vägar att gå. Var och en av dessa svarar mot olika delmängder B. Således finns det 2^n olika delmängder till A.

2.4 Sammanfattning

Med en *mängd* menar vi en *väldefinierad* samling av objekt eller *element*. Ordet ”väldefinierad” syftar på att man för varje tänkbart objekt x otvetydigt skall kunna avgöra om x hör till mängden eller ej. Om x är ett element i mängden A så skriver man

$$x \in A$$

vilket utläses som att "x tillhör A". Om x inte är ett element i A så skriver man $x \notin A$.

Det enklaste sättet att ange en inte alltför stor mängd är att helt enkelt lista deras element inom klamrar. Mängder som anges av att deras element har en viss egenskap, E, kan skrivas som $\{x : x \text{ har egenskapen } E\}$.

Viktiga mängder med speciella beteckningar:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} &= \text{mängden av reella tal,} \\
\mathbb{C} &= \text{mängden av komplexa tal,} \\
\mathbb{Q} &= \text{mängden av rationella tal,} \\
\mathbb{Z} &= \text{mängden av heltal} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}, \\
\mathbb{Z}_+ &= \text{mängden av positiva heltal} = \{1, 2, 3, \ldots\}, \\
\mathbb{N} &= \text{mängden av naturliga tal} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \\
\emptyset &= \text{ den tomma mängden} = \{\}.
\end{aligned}$$

DEFINITION. Om A och B är mängder sådana att det för alla x gäller att $x \in A \Rightarrow x \in B$, så säger vi att A är en *delmängd* av B och att A är *innehållen* eller *inkluderad* i B och vi skriver

$$A \subseteq B.$$

Om det både gäller att $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$, så säger vi att $A = B$. Om A är en delmängd av B och $A \neq B$, så säger man att A är en *äkta* delmängd av B och skriver $A \subset B$.

Ett *intervall* är mängden av reella tal mellan något minsta värde och något största värde. Beroende på om man menar att de två gränspunkterna ska ingå i intervallet eller inte formuleras detta på olika sätt. Ett slutet intervall $[a, b]$ är mängden

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

och ett öppet intervall mängden

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Går även att ha öppet i en ända och slutet i den andra.

Viktiga operatorer på mängder är:

- Snitt: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$,
- Union: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$,
- Mängddifferens: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$,
- Komplement: $A^c = U \setminus A$,
- Symmetrisk mängddifferens: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Mängder och relationer mellan dessa kan illustreras med hjälp av s. k. *Venn-diagram.*

Den *kartesiska produkten* av två mängder A och B är

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Potensmängden av en mängd A, $\mathcal{P}(A)$, är *mängden av alla delmängder till* A.

SATS *Om A är en ändlig mängd med n element, så innehåller $\mathcal{P}(A)$ precis 2^n element.*

2.5 Övningar

1. Vilka är elementen i följande mängder?:

   (a) $\{x \in \mathbb{Z}_+ : 7 < x < 12\}$,

   (b) $\{x \in \mathbb{Z}_+ : x > 12 \wedge x < 7\}$,

   (c) $\{x \in \mathbb{Z}_+ : x^2 > 8 \wedge x > 8\}$,

   (d) $\{x \in \mathbb{Z}_+ : 5 \leq x < 9\}$.

2. Låt $A = \{0, \{1\}, \emptyset, \{2, 3\}\}$. Vilka av följande påståenden är sanna?:

   (a) $\emptyset \subset A$,

   (b) $\emptyset \in A$,

(c) $1 \subseteq A$,

(d) $\{1\} \in A$,

(e) $\{1\} \subseteq A$,

(f) $\{\{1\}\} \subseteq A$,

(g) $\{1, 2, 3\} \subseteq A$,

(h) $\{0, 1\} \in A$.

3. Bevisa ett par av de likheterna i tabellen på sidan 48 som inte bevisades i texten.

4. Om A är en mängd med med m element och B är en mängd med n element, hur många element finns det då i $A \times B$? (Med andra ord om $|A| = m$ och $|B| = n$, vad blir då $|A \times B|$?) Hur många element finns det i $\mathcal{P}(A \times B)$?

5. Är det sant att det för alla mängder A, B och C gäller att $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$? Är det sant att $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$? Bevisa eller ge motexempel.

6. Om $A \subseteq B$, vad blir då $A \cap B$, $A \setminus B$ och $A \cup B$?

7. Antag att $A \setminus B = \{a, c, k\}$, $B \setminus A = \{b, f\}$ och $A \cap B = \{s, t, v, x\}$. Vad är då A och vad är B?

8. Antag att A, B och C är tre mängder för vilka det gäller att $|A| = 14$, $|C| = 27$, $|A \cap B| = 4$, $|A \cap C| = 6$, $|B \cap C| = 16$, $|A \cap B \cap C| = 3$ och $|A \cup B \cup C| = 41$. Hur många element finns det då i B?

9. Visa att om $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ så gäller att $A = B$.

10. Antag att $|A| = a$, $|B| = b$ och $|A \cap B| = c$. Vad är då $|A \cup B|$?

Kapitel 3

Funktioner och relationer

3.1 Funktioner

Begreppet funktion har du säkert stött på tidigare, exempelvis i gymnasiekurser i matematik, fysik och kemi. I en sådan kurs lär man sig (förmodligen) att en funktion är en regel för att till ett eller flera tal ordna exakt ett tal. Exempelvis är funktionen $f(x) = x^2$ den regel som till varje tal x ordnar talet x^2, så att t. ex. $f(4) = 16$ och $f(\sqrt{2}) = 2$. Ett annat exempel är funktionen $g(a, b) = a+b+4$ som till varje talpar (a, b) ordnar talet $a+b+4$, så att t. ex. $g(0, 0) = 4$ och $g(4.3, 7.2) = 15.5$. Notera speciellt här att de specifika bokstäverna x, a och b är oviktiga, d. v. s. funktionen f i exemplet ovan kan precis lika gärna anges via $f(c) = c^2$ eller via $f(r) = r^2$ etc, och g kan lika gärna anges via $g(j, q) = j + q + 4$.

Vi ska här inte ändra på gymnasiets tolkning av funktionsbegreppet, men vi ska göra det en aning mer allmänt och knyta ihop det med vad vi i övrigt har lärt oss. Det allmänna funktionsbegreppet är som följer:

Definition. En funktion f från mängden A till mängden B är en regel som till varje element $a \in A$ ordnar ett entydigt element $f(a)$ i B.

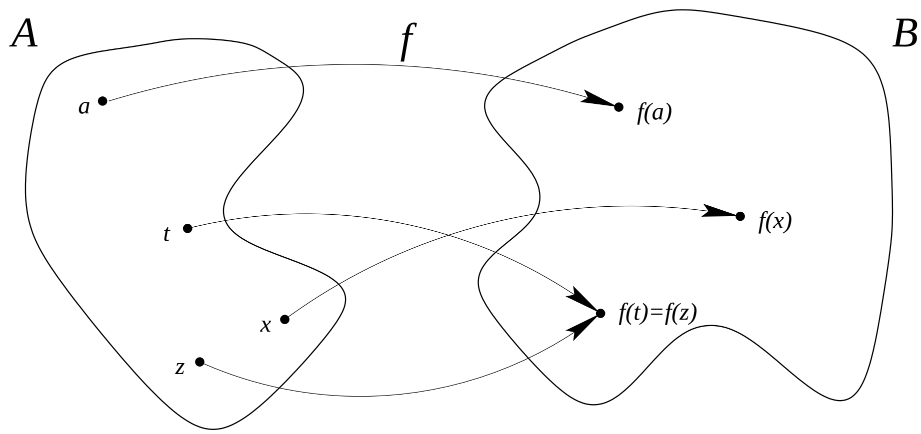
Lite löst sagt: Man stoppar in ett element från A i f och får ut ett element i B. Att f är en funktion från A till B skrivs på symbolisk form som

$$f : A \to B.$$

Om man vill beteckna vad som händer med ett element a kan man skriva

$$a \mapsto f(a)$$

vilket utläses som att ”a avbildas på $f(a)$”. En illustration till funktionsbegreppet finns i figur 3.1.



Figur 3.1: En illustration av funktionsbegreppet: Punkterna a, t, x och z i A avbildas på punkterna $f(a)$, $f(t)$, $f(x)$ respektive $f(z)$ i B.

Mängden A kallas för f's *definitionsmängd* eller *definitionsområde*, medan mängden B kallas för f's *målmängd*. Om C är en delmängd av A definierar man

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\} \subseteq B,$$

d. v. s. $f(C)$ är mängden av alla möjliga värden av $f(x)$ om x får väljas fritt i C. Man kallar $f(C)$ för *bilden av C*. Mängden $f(A)$, d. v. s. bilden av hela definitionsmängden, kallas för f's *värdemängd* och har också beteckningen V_f. Observera att $f(A) \subseteq B$, d. v. s. värdemängden är en delmängd till målmängden. Det finns dock inget som säger att $f(A) = B$. (Det kan verka onödigt att hålla sig med en målmängd som är större är funktionens värdemängd. Det finns dock flera skäl till att ibland göra så, exempelvis behandlar man ibland flera olika funktioner som på ett naturligt sätt har samma målmängd, men inte samma värdemängd.)

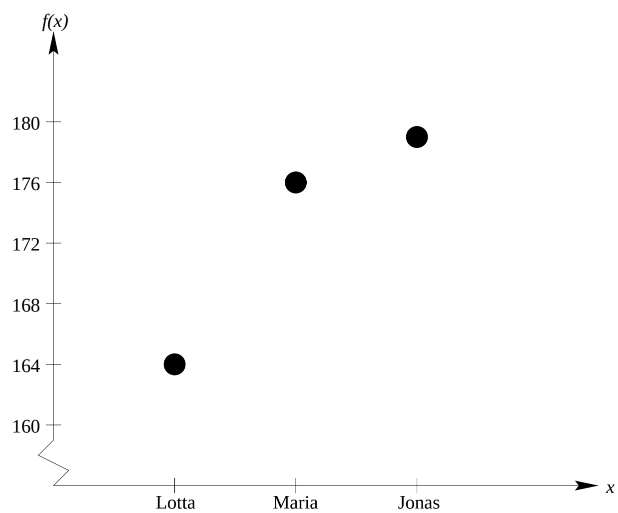
Anmärkning. Observera att vårt funktionsbegrepp är identiskt med det som brukar användas inom programmering. Definitionsmängden svarar mot 'typen' hos indata och målmängden svarar mot 'typen' hos utdata. $\square$

Ett vanligt sätt att illustrera en viss funktion är genom att rita dess *graf.* Formellt definieras grafen till en funktion $f : A \to B$ som delmängden

$$\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B.$$

Vi avslutar avsnittet med ett antal exempel som illustrerar de nya begreppen.

Exempel. Låt $A = \{\text{Lotta,Maria,Jonas}\}$ och låt funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ ges av de tre personernas längd i centimeter, så att $f(\text{Lotta}) = 164$, $f(\text{Maria}) = 176$ och $f(\text{Jonas}) = 179$. Då är $V_f = f(A) = \{164, 176, 179\}$ och exempelvis $f(\{\text{Lotta,Jonas}\}) = \{164, 179\}$. I figur 3.2 finns f's graf utritad. $\square$



Figur 3.2: Grafen till funktionen given av Lottas, Marias och Jonas längd.

Exempel. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x + 5$ och $g(x) = x^2 - 1$. Då är

$$V_f = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R},$$

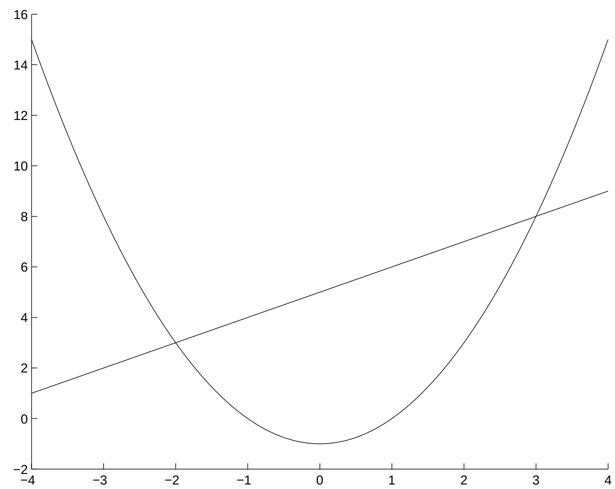
eftersom ekvationen $f(x) = y$ har lösning x oavsett vad y är. Vi har också

$$V_g = g(\mathbb{R}) = [-1, \infty),$$

ty x^2 antar exakt alla ickenegativa reella tal. Exempel på bilder av delmängder till $\mathbb{R}$ är

$$\begin{aligned} f(\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}, \\ f([0, \infty)) &= [5, \infty), \\ g((0, 1)) &= (-1, 0), \\ g(\mathbb{Z}) &= \{-1, 0, 3, 8, 15, 24, 35, \ldots\}. \end{aligned}$$

Delar av de funktionernas grafer finns i figur 3.3 $\square$



Figur 3.3: Delar av graferna till funktionerna $f(x) = x + 5$ och $g(x) = x^2 - 1$.

Exempel. Antag att det i familjen Perssons fruktskål ligger en banan, ett äpple och ett päron. Då kommer syskonen Elsa och Mattias och tar för sig så att Elsa får bananen och päronet medan Mattias får äpplet. Detta kan beskrivas av en funktion där definitionsmängden utgörs av de tre frukterna och där funktionens värde för en viss frukt ges av den person som äter upp den. Med andra ord: $f : A \to B$ där $A = \{$banan, äpple, päron$\}$, $B = \{$Elsa, Mattias$\}$, f(banan) $=$ Elsa, f(äpple) $=$

x \ $f(x)$	Elsa	Mattias
banan	●	
äpple		●
päron	●	

Figur 3.4: Grafen till funktionen given av konsumtionen av familjen Perssons fruktskål.

Mattias och f(päron) = Elsa. Grafen till en funktion av detta slag kan man ge i tabellform, se figur 3.4. □

Exempel. Låt A vara mängden av alla utsagor. Låt $f(p)$, $p \in A$, vara p's sanningsvärde (i ett givet sammanhang). Då är f en funktion från A till mängden $B = \{S, F\}$. Observera att vi i kapitlet om logik för att förenkla något identifierade utsagan med dess sanningsvärde. Det är mer formellt korrekt att som här betrakta utsagorna som en mängd A och använda vår funktion att beräkna dess sanningsvärde.

För varje par, (p, q), av utsagor, sätt $g(p, q) = p \wedge q$. Då är g en funktion med $A \times A$ som definitionsmängd och A som målmängd. □

3.2 Injektivitet, surjektivitet, bijektivitet och invers

Om man vill kan man tänka på en funktion $f : A \to B$ som en ”maskin” där man stoppar in ett godtyckligt element $a \in A$ och får ut ett entydigt element $f(a) \in B$. Man kan tänka sig att man skulle vilja kunna köra ”maskinen” baklänges. Med det menar vi att om man stoppar in något $b \in B$, så vill man att $a \in A$ sådant att $b = f(a)$ ska komma ut. Då inser man efter en stunds funderande att för att detta ska fungera krävs att två villkor är uppfyllda. Dels att varje element i B finns i f's värdemängd för annars kan man inte hitta något sådant a, och dels att det för varje $b \in B$ bara finns ett element $a \in A$ med $f(a) = b$ för att a ska vara entydigt. Dessa två viktiga egenskaper kallas för *surjektivitet* och *injektivitet.* Här följer de formella definitionerna:

DEFINITION. Låt $f : A \to B$. Om $f(A) = B$, så säges f vara *surjektiv.* Om det för alla par a_1, a_2 av element i A gäller att

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2),$$

så säges f vara *injektiv.* Om f är både surjektiv och injektiv så är f *bijektiv.*

Diskussionen före definitionen mynnade alltså ut i att för att man ska kunna ”köra maskinen baklänges” krävs att f är bijektiv. Vi noterar också att om $f : A \to B$ inte är surjektiv, d. v. s. $f(A) \subset B$, så kan man alltid minska målmängden från B till $f(A)$ och få en surjektiv funktion.

Innan vi tittar på ett par exempel så kommer här ett par allmänna råd i konsten att undersöka om funktioner är injektiva respektive surjektiva. För att visa att en funktion $f : A \to B$ är surjektiv, så tar man ett godtyckligt element $b \in B$ och visar på något sätt att det finns $a \in A$ sådant att $b = f(a)$. (Hur visar man att en funktion inte är surjektiv?) När det gäller injektiviteten så är det oftast enklast att göra ett kontrapositivt bevis, d. v. s. visa att

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Exempel. Låt $A = \{0, 1, 2\}$ och $B = \{2, 3, 4\}$ och låt $f : A \to B$ ges av att $f(0) = 2$, $f(1) = 4$, $f(2) = 2$. Då är f varken surjektiv eller injektiv, ty $f(A) = \{2, 4\} \subset B$ och $f(0) = f(2)$. Om man betraktar f som en funktion från A till $\{2, 4\}$ blir den dock surjektiv i enlighet med observationen ovan. □

Exempel. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = 2x - 5$. Ekvationen $f(x) = y$, d. v. s. $2x - 5 = y$, har lösning $x = (y + 5)/2$. Det betyder att för alla $y \in \mathbb{R}$ så finns x sådant att $f(x) = y$. Med andra ord är $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ så f är surjektiv. Är f även injektiv? Antag att $f(x) = f(y)$ för reella tal x och y. Då är alltså

$$2x - 5 = 2y - 5,$$

vilket medför att $2x = 2y$ så att $x = y$. Eftersom x och y var godtyckligt valda har vi visat att för alla x och y gäller att

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

vilket är ekvivalent med att $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Således har vi visat att f är injektiv. Eftersom f också är surjektiv är den alltså bijektiv. $\square$

Exempel. Låt $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ges av

$$f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}.$$

Funktionen är injektiv ty antag att $f(x) = f(y)$. Då gäller

$$1 + x + x^2 = 1 + y + y^2,$$

d. v. s.

$$x - y + x^2 - y^2 = 0$$

och eftersom $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, så gäller

$$x - y + x^2 - y^2 = (x - y)(1 + x + y) = 0.$$

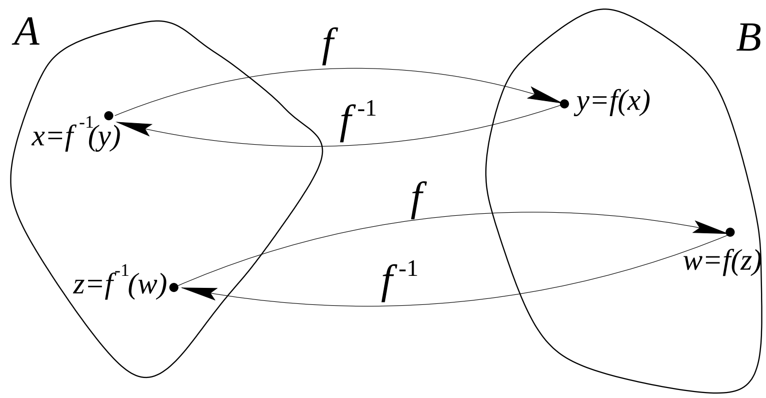
Men om produkten är 0 måste en av faktorerna vara 0. Den andra faktorn kan dock inte vara 0, eftersom funktionen bara är definierad för ickenegativa reella tal så att $x \geq 0$ och $y \geq 0$. Således följer det att $x - y = 0$, d. v. s. $x = y$ som önskat.

Funktionen är dock inte surjektiv, ty $1 + x + x^2 \geq 1$ med likhet då $x = 0$ så $f(x) \leq 1$. Dessutom antar $1 + x + x^2$ alla värden större än 1 så $f(x)$ antar alla positiva värden större än 0. Därmed är $f([0, \infty)) = (0, 1] \neq \mathbb{R}$. Om vi istället betraktar f som en funktion från $[0, \infty)$ till $(0, 1]$, så blir den surjektiv. Eftersom den var injektiv blir den i så fall även bijektiv. $\square$

Bijektivitet är alltså precis den egenskap som krävs av en funktion för att den ska kunna ”köras baklänges”. Mer formellt säger man att om $f : A \to B$ är en bijektiv funktion så har f en *invers* $g : B \to A$ som ges av att

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x.$$

Inversen till f brukar betecknas med f^{-1}. Med andra ord: Inversen f^{-1} är en funktion från B till A som ges av att $f^{-1}(y) = x$ då $f(x) = y$



Figur 3.5: Inversen till en funktion.

(figur 3.5 illustrerar). En synonym till bijektiv som ofta används är helt naturligt *inverterbar*.

Exempel. Vi bestämmer inversen till funktionen $f(x) = 2x - 5$ som vi i ett exempel ovan såg var en bijektiv funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. För att bestämma $f^{-1}(y)$ ska vi bestämma för vilket x som $f(x)$ är just y, d. v. s. lösa ekvationen $f(x) = y$ som i detta fall blir

$$2x - 5 = y.$$

Denna har vi redan löst och vi fick ju att $x = \frac{y+5}{2}$. Alltså är

$$f^{-1}(y) = \frac{y+5}{2}.$$

Eftersom själva bokstaven y som vi anger funktionen med är utbytbar kan vi om vi vill byta ut den mot (till exempel) x och har att f^{-1} är den funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ som ges av

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}.$$

$\square$

Exempel. Låt oss också bestämma inversen till funktionen som dök upp i det tredje exemplet ovan. Nu är ju den funktionen inte surjektiv så den saknar invers. Dock är den ju bijektiv om vi minskar målmängden och betraktar den som funktion $f : [0, \infty) \to (0, 1]$ så låt oss göra det.

Då är inversen f^{-1} den funktion från $(0,1]$ till $[0,\infty)$ som ges av att $x = f^{-1}(y)$ är lösningen till ekvationen $f(x) = y$. I detta fall får vi ekvationen

$$y = \frac{1}{1+x+x^2} \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \frac{1}{y} = 0.$$

Denna andragradsekvation har den allmänna lösningen

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{y} - \frac{3}{4}},$$

men eftersom inversens målmängd är de ickenegativa reella talen är vi bara intresserade av den ickenegativa lösningen. Vi får att

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{y} - \frac{3}{4}},\ y \in (0,1].$$

Notera här att $1/y \geq 1$, så

$$\sqrt{\frac{1}{y} - \frac{3}{4}} \geq \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

och vi får ett icke-negativt tal. □

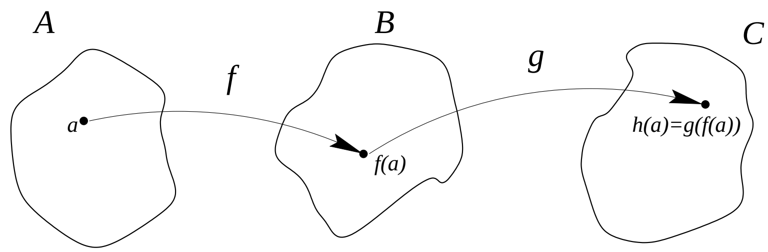
3.3 Sammansatta funktioner

Antag att f är en funktion från A till B och att g är en funktion från B till någon tredje mängd C, d. v. s. det som "kommer ut" från f går att "stoppa in" in g. Man kan då bilda en ny funktion h från A till C genom att för varje $x \in A$ sätta

$$h(x) = g(f(x)).$$

Funktionen h kallas för *sammansättningen* av f och g och man skriver $h = g \circ f$, d. v. s. man har $g \circ f : A \to C$ (se figur 3.6). Om man använder liknelsen med funktioner som maskiner, så kan man tänka på funktionen $g \circ f$ som den maskin man får om man kopplar ihop utgången på maskinen f med ingången på maskinen g.

Det är viktigt att observera att $g \circ f$ och $f \circ g$ i regel är olika saker. Det är ju inte säkert att $f \circ g$ ens existerar bara för att $g \circ f$ existerar; det hänger på om utgången till g passar ihop med ingången till f, d. v. s.



Figur 3.6: Den sammansatta funktionen $h = g \circ f$.

om $A = C$. I det allmänna fallet gäller inte detta så det ska snarare betraktas som undantag än regel att även $f \circ g$ existerar. Även om både $f \circ g$ och $g \circ f$ existerar så är de i allmänhet olika.

Exempel. Låt A vara mängden av alla utsagor, låt $g : A \times A \to A$ ges av $g(p, q) = p \wedge q$ och låt $f : A \to \{S, F\}$ ges av att $f(p)$ är sanningsvärdet av p. Då är $h = f \circ g$ den funktion från $A \times A$ till $\{S, F\}$ som ges av att $h(p, q)$ är sanningsvärdet av $p \wedge q$. □

Exempel. Låt

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Pelle, Lars}\} \\ B &= \{\text{pizza, pasta, kebab}\} \\ C &= \{700, 900, 1100\}. \end{aligned}$$

Låt $f : A \to B$ ges av $f(\text{Pelle})$=pizza, $f(\text{Lars})$=kebab och låt $g : B \to C$ ges av $g(\text{pizza}) = 1100$, $g(\text{pasta}) = 900$ och $g(\text{kebab}) = 700$. Då är $h = g \circ f$ funktionen från A till C som ges av $h(\text{Pelle}) = 1100$ och $h(\text{Lars}) = 700$.

(Vad betydde detta? Jo, f anger vad kompisarna Pelle och Lars åt till lunch en viss dag och g anger energiinnehållet i de olika rätterna som fanns att välja mellan på den pizzeria där de två kompisarna åt denna dag. Därmed anger h hur mycket energi Pelle och Lars fick i sig vid lunch.) Vi noterar att sammansättningen $f \circ g$ inte existerar i detta fall. □

Exempel. Låt f och g båda vara funktioner från $[0, \infty)$ till $[0, \infty)$ och ges av $f(x) = x^2$ och $g = 1/(1 + x)$. Då är

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 1/(1 + f(x)) = 1/(1 + x^2).$$

I detta fall råkar även $f \circ g$ vara väldefinierad och

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x)^2 = 1/(1+x)^2.$$

Vi ser att de två sammansättningarna i detta fall är olika funktioner.
$\square$

Det är naturligtvis inte uteslutet att $f \circ g$ och $g \circ f$ råkar bli samma. Exempelvis sker detta då $A = B = C$ om antingen $f(x) = x$ eller $g(x) = x$. Det kan också ske i andra situationer. Låt exempelvis f och g vara funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ där $f(x) = x^3$ och $g(x) = x^5$. Då är både $f \circ g$ och $g \circ f$ funktionen $x \mapsto x^{15}$. Ett trivialt men intressant fall är när $f : A \to B$ är bijektiv och $g : B \to A$ är inversen till f. Då är både $f \circ g(x) = x$ och $g \circ f(x) = x$.

Anmärkning. Funktionen $f : A \to A$ som ges av $f(x) = x$ kallas för *identitetsfunktionen* på A och vi betecknar den med id_A. Denna har egenskapen att om $g : A \to A$ så gäller ju att

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x) \text{ och } g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x),$$

d. v. s. $f \circ g = g \circ f = g$.

Om $g : A \to B$ är en bijektiv funktion med invers $g^{-1} : B \to A$ så påpekade vi ovan att

$$g \circ g^{-1}(x) = x \text{ och } g^{-1} \circ g(x) = x,$$

d. v. s.

$$g \circ g^{-1} = id_B \text{ och } g^{-1} \circ g = id_A.$$

Detta ger ett alternativt sätt att karakterisera inversen till en bijektiv funktion $g : A \to B$ som en funktion $f : B \to A$ sådan att $g \circ f = id_B$ och $f \circ g = id_A$. $\square$

Ofta vill man sätta ihop fler än två funktioner och det går alldeles utmärkt. Om $f : A \to B$, $g : B \to C$ och $h : C \to D$ så får vi att

$$h \circ (g \circ f) : A \to D \text{ och } (h \circ g) \circ f : A \to D.$$

Dessutom har vi att

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))), \\ ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).\end{aligned}$$

Det spelar alltså ingen roll hur vi sätter parenteserna och vi kan med gott samvete skriva $h \circ g \circ f$. Detta betyder också att vi utan att stöta på problem kan definiera potens av en funktion $f : A \to A$ som

$$f^2 = f \circ f,\ f^3 = f \circ f \circ f \text{ etc.}$$

Exempel. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f(x) = x^2$. Då är t. ex.

$$f^4(x) = f(f(f(f(x)))) = f(f(f(x^2))) = f(f(x^4)) = f(x^8) = x^{16}.$$

□

3.4 Operatorer

Vi har redan tittat på *operatorer* på utsagor ($\wedge$, $\vee$, etc) och mängder ($\cap$, $\cup$, etc) och sedan tidigare kände ni ju till operatorer på tal ($+$, $\cdot$, $-$, etc). Nu ska vi formalisera begreppet och se att det i själva verket kan betraktas som en speciell typ av funktioner.

Definition. Låt A vara en godtycklig mängd. En *unär operator* på A är en funktion $f : A \to A$. En *binär operator* på A är en funktion $f : A \times A \to A$.

Mer allmänt kallar man en funktion $f : A^n \to A$ för en n-är operator. I denna framställning kommer vi dock endast att se unära och binära operatorer.

En unär operator är alltså en funktion som har samma definitionsmängd som målmängd. För en binär operator gäller att definitionsmängden är den kartesiska produkten av målmängden med sig själv. Vi har som sagt redan sett exempel på sådana funktioner. Exempelvis är funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ given av $f(x) = x + 5$ en unär operator på $\mathbb{R}$. Funktionen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ given av $g(x, y) = x+y-4$ är en binär operator på $\mathbb{R}$. Det finns dock andra viktigare och mer naturliga exempel:

Exempel. Funktionerna $f(x, y) = x + y$ och $g(x, y) = x \cdot y$ är binära operatorer på $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$. Funktionen $h(x) = -x$ är en unär operator på $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$. (Dock ej på $\mathbb{Z}_+$. Varför?) □

Exempel. Låt A vara mängden av alla utsagor. Då är $f(p, q) = p \wedge q$ och $g(p, q) = p \vee q$ exempel på binära operatorer på A. Funktionen $h(p) = \neg p$ är ett exempel på en unär operator på A. □

Exempel. Låt U vara en icketom mängd som vi betraktar som universum och låt $\mathcal{B} = \mathcal{P}(U)$. För $A, B \in \mathcal{B}$, sätt $f(A, B) = A \cup B$, $g(A, B) = A \cap B$, $h(A, B) = A \setminus B$ och $i(A) = A^c$. Då är f, g och h exempel på binära operatorer på $\mathcal{B}$ medan i är en unär operator. $\square$

Exempel. Låt A vara en godtycklig mängd och låt $\mathcal{F}$ vara mängden av alla unära operatorer på A, d. v. s. alla funktioner $f : A \to A$. För $f, g \in \mathcal{F}$ så sätter vi

$$h(f, g) = f \circ g.$$

Då är även $h(f, g)$ en funktion från A till A. Därmed tar h ett par av element i $\mathcal{F}$ som argument och ger ett nytt element i $\mathcal{F}$ som svar, d. v. s. $h : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$. Med andra ord är h en binär operator på $\mathcal{F}$. $\square$

Vi ser att i alla exemplen betecknas de binära operatorerna med en symbol $(+, \cdot, \cap, \vee, \circ, \ldots)$ mellan sina två argument. Detta är en praktisk konvention som man använder för binära operatorer i allmänhet. När vi betraktar en allmän, icke namngiven, binär operator ska vi beteckna denna med $*$. Motsvarande konvention för unära operatorer är att sätta operatorn framför sitt argument. En allmän unär operator betecknar vi med $\sim$. Vi ska nu lära oss namn på en del egenskaper som unära och binära operatorer mer eller mindre ofta besitter:

DEFINITION. Låt A vara en mängd, låt $*$ vara en binär operator på A och låt $\sim$ vara en unär operator på A.

1. Ett element $e \in A$ är en *identitet* för $*$ om $e * a = a * e = a$ för alla $a \in A$.
2. Antag att e är en identitet och $a \in A$. Om $b \in A$ är sådant att $a * b = b * a = e$ så säger man att b är en *invers* till a m. a. p. $*$.
3. Två element a och b *kommuterar* m. a. p. $*$ om $a * b = b * a$.
4. Operatorn $*$ är *kommutativ* om a och b kommuterar för alla $a, b \in A$.
5. Operatorn $*$ är *associativ* om det för alla $a, b, c \in A$ gäller att $a * (b * c) = (a * b) * c$.
6. Den unära operatorn $\sim$ är en *involution* om det för alla $a \in A$ gäller att $\sim (\sim a) = a$.

Exempel. Både $+$ och $\cdot$ är associativa och kommutativa operatorer på $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$. Talet 0 är en identitet för $+$ och talet 1 är en identitet för $\cdot$. På $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ har alla element x inversen $-x$ m. a. p. $+$. På $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ har alla element $x \neq 0$ inversen $1/x$ m. a. p. $\cdot$. Den unära operatorn $-$ är en involution eftersom $-(-x) = x$ för alla x. (Vi utnyttjar här kunskaper som man har med sig redan från grundskolan. I kapitel 4 görs rigorösa definitioner av alla begrepp och resultaten bevisas utifrån Peanos axiom enligt logikens inferensregler.) $\square$

Exempel. De logiska operatorerna $\wedge$ och $\vee$ är såväl associativa som kommutativa binära operatorer enligt tabellen på sidan 18. Enligt den tabellen framgår det också bl. a. att utsagan S är en identitet för $\wedge$, ty $p \wedge S = p$ för alla p, medan F är en identitet för $\vee$. Den enda utsaga som har en invers m. a. p. $\wedge$ är S vars invers är S självt, ty $p \wedge p^{-1} = S$ har bara lösningen $p = p^{-1} = S$. Det enda påståendet som har en invers m. a. p. $\vee$ är F som har sig själv som invers, ty $p \vee p^{-1} = F$ har bara lösningen $p = p^{-1} = F$. Negationen $\neg$ är en involution. $\square$

Exempel. I exemplet med universumet U och $\mathcal{B} = \mathcal{P}(U)$ är $\cap$ och $\cup$ kommutativa och associativa. Operatorn $\setminus$ är dock varken kommutativ eller associativ ty exempelvis $U \setminus \emptyset \neq \emptyset \setminus U$ och $U \setminus (U \setminus U) \neq (U \setminus U) \setminus U$. Mängden $\emptyset$ är en identitet för $\cup$ och U är en identitet för $\cap$. Det finns ingen identitet för $\setminus$. Inverser saknas i allmänhet. Komplementoperatorn är en involution. $\square$

Exempel. Betrakta återigen mängden $\mathcal{F}$ av alla funktioner f från en given mängd A till sig själv. Operatorn $\circ$ är associativ, ty för alla x gäller att

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x),\end{aligned}$$

men som vi tidigare sett exempel på är den inte kommutativ. Identitetsfunktionen id_A gör skäl för sitt namn för som vi redan påpekat är

$$f \circ id_A = id_A \circ f = f$$

för alla $f \in \mathcal{F}$ och id_A är alltså en identitet m. a. p. sammansättning. $\square$

Innan vi lämnar detta avsnitt passar vi på att göra två enkla observationer, nämligen att identiteter är unika och att detsamma gäller för inverser förutsatt att operatorn är associativ:

Sats 3.4.1 *Låt $*$ vara en operator på en icketom mängd A. Det finns högst en identitet för $*$ i A. Om $a \in A$ och $*$ är associativ, så har a högst en invers.*

Bevis. Antag att e och f är två identiteter. Då gäller enligt definitionen av identitet att

$$e = e * f = f,$$

där den första likheten följer av att f är en identitet och den andra av att e är en identitet.

På snarlikt sätt så gäller att om b och c är två inverser till a, e är identiteten och $*$ är associativ att

$$b = b * e = b * (a * c) = (b * a) * c = e * c = c.$$

□

3.5 Summasymbolen och besläktade symboler

Det är här på sin plats att lära sig några symboler som används för att förkorta långa uttryck där samma operator används ett stort antal gånger. Antag att vi har talen $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ och att vi i något matematiskt uttryck behöver använda summan av dem. Då kan vi skriva

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}.$$

Dock inser man när man skrivit detta några gånger att det är ett ganska otympligt sätt att skriva på. Detta är skälet till att man infört summasymbolen $\sum$ för att istället kunna skriva på det betydligt smidigare sättet

$$\sum_{k=1}^{100} a_k.$$

Tolkningen av skrivsättet är att man ska låta bokstaven k löpa genom heltalen från 1 till 100 och för vart och ett av dessa 100 värden på

k läggs termen a_k till den summa man är intresserad av. Bokstaven k i detta exempel kallas för summationsindex. Valet av den specifika bokstaven k är förstås oviktigt, d. v. s. $\sum_{i=1}^{100} a_i$ och $\sum_{n=1}^{100} a_n$ avser precis samma summa. Huvudsaken är att indexet hos termerna stämmer överens med summationsindexet vid summasymbolen på avsett sätt. (Exempelvis $\sum_{n=1}^{100} a_k$ blir bara $100a_k$; n varierar, men inte k. Detta var förmodligen inte vad man avsett.) För att poängtera detta varieras summationsindex friskt i exemplen som följer.

Exempel. Låt oss skriva summan $1 + 2 + 3 + \ldots + 75$ med hjälp av summasymbolen. Eftersom term nummer m i den aktuella summan är just m skriver vi

$$\sum_{m=1}^{75} m.$$

□

Ibland är man intresserad av summor av oändligt många termer, d. v. s. summor av typen $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$. Då anger man helt enkelt oändligheten som slutmål för summan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Vid ytterligare andra tillfällen är situationen sådan att termerna på ett naturligt sätt har andra objekt än heltal som index, d. v. s. man har någon mängd M och för varje element $i \in M$ finns en term a_i. Då kan man för summan av alla termerna skriva

$$\sum_{i \in M} a_i.$$

Exempel. Låt M vara mängden av alla människor som betalar skatt till den svenska staten ett visst år och låt a_i vara den skatt som person i betalar. Då anger

$$\sum_{i \in M} a_i$$

statens totala skatteintäkt från privatpersoner detta år. □

Om man kan tänkas vara intresserad av summor av många termer kan man naturligtvis i andra lägen istället tänkas vara intresserad av produkter av många termer. Även då finns en kortsymbol: $\prod$. Den fungerar på precis som summasymbolen. Exempelvis kan man skriva produkten $1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 100$ som $\prod_{n=1}^{10} n^2$ och om vi har ett tal a_j för varje $j \in M$ kan vi skriva $\prod_{j \in M} a_j$ för produkten av dem.

Nu inser man förstås att detta sätt att skriva långa uttryck på kortform är mycket mer generellt än att gälla bara summor och produkter. Man kan utan problem ersätta addition respektive multiplikation med vilken kommutativ och associativ operator som helst. Till exempel gör man det ofta för konjunktion och disjunktion och använder då lite större versioner av de tecken man redan har för dem. Om exempelvis $p_1, p_2, \ldots, p_{20}$ är logiska utsagor kan man skriva $\bigwedge_{i=1}^{20} p_i$ för $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{20}$ och om man till varje element n i mängden D har en logisk utsaga q_n så står $\bigvee_{n \in D} q_n$ för disjunktionen av dem. I senare kapitel kommer vi att se exempel på ytterligare kortformer av detta slag.

3.6 Relationer

Med en *relation* mellan två objekt brukar man mena en egenskap som dessa besitter tillsammans. Det finns otaliga exempel på sådana egenskaper, både inom och utom matematiken. Relationen ”$x = y$” uttrycker att de två objekten är lika. Om x och y är tal kan de ha relationen ”$x \leq y$”, d. v. s. egenskapen att y är minst lika stort som x. Om x är en man och y är en kvinna kan de exempelvis ha relationen ”x är far till y” eller ”y är syster till x”. Om x är en varg och y är en gris kan de ha relationen ”x äter upp y”, t. ex. ”Vargen Zeke äter upp grisen Lisen”.

Vi ser att en relation är en egenskap hos ett par av objekt som kan, men inte behöver, vara av samma typ. Låt oss nu ge en formell definition av relationsbegreppet:

Definition. Låt A och B vara mängder. En relation R från A till B är en delmängd till den kartesiska produktmängden $A \times B$, d. v. s.

$$R \subseteq A \times B.$$

Om $A = B$ så säger vi att R är en relation *på* A.

Hur tolkar man detta i termer av det som sägs i texten? Jo, att ty $1R_1 2 \wedge 2R_2 1$, $1R_1 3 \wedge 3R_2 2$, $2R_1 3 \wedge 3R_2 2$ är de enda sätten att komma från ett element till ett annat via först R_1 och sedan R_2. Vidare gäller enligt samma resonemang att

$$R_2 \circ R_1 = \{(2,2),(2,3),(3,3)\}.$$

De två sammansättningarna är alltså olika i detta fall. □

3.10 Sammanfattning

DEFINITION. En funktion f från mängden A till mängden B är en regel som till varje element $a \in A$ ordnar ett entydigt element $f(a)$ i B. Att f är en funktion från A till B skrivs på symbolisk form som

$$f : A \to B.$$

Om man vill beteckna vad som händer med ett element a kan man skriva

$$a \mapsto f(a)$$

vilket utläses som att "a avbildas på $f(a)$"

Mängden A kallas för f's *definitionsmängd*, medan mängden B kallas för f's *målmängd*. Om C är en delmängd av A definierar man *bilden av C* som

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\} \subseteq B.$$

Mängden $f(A)$, d. v. s. bilden av hela definitionsmängden, kallas för f's *värdemängd*.

Grafen till en funktion $f : A \to B$ definieras som delmängden

$$\mathrm{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B.$$

DEFINITION. Låt $f : A \to B$. Om $f(A) = B$, så säges f vara *surjektiv*. Om det för alla par a_1, a_2 av element i A gäller att

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2),$$

så säges f vara *injektiv*. Om f är både surjektiv och injektiv så är f *bijektiv*.

Om $f : A \to B$ är en bijektiv funktion så har f en *invers* $g : B \to A$ som ges av att

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x.$$

Inversen till f brukar betecknas med f^{-1}. Inversen f^{-1} är alltså funktionen från B till A som ges av att $f^{-1}(y) = x$ då $f(x) = y$. En synonym till bijektiv som ofta används är helt naturligt *inverterbar*.

Antag att $f : A \to B$ och $g : B \to C$ är två funktioner där f's målmängd är samma som g's definitionsmängd. *Sammansättningen* $h = g \circ f : A \to C$ definieras av att för varje $x \in A$ gäller att

$$h(x) = g(f(x)).$$

Även om både $f \circ g$ och $g \circ f$ existerar (A=C) så är de i allmänhet olika.

Funktionen $f : A \to A$ som ges av $f(x) = x$ kallas för *identitetsfunktionen* och vi betecknar den med id_A. En funktion $g : A \to B$ och dess invers uppfyller följande:

$$g \circ g^{-1} = id_B \text{ och } g^{-1} \circ g = id_A.$$

Sammansättning av funktioner är associativ, d. v. s.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Definition. Låt A vara en godtycklig mängd. En *unär operator* på A är en funktion $f : A \to A$. En *binär operator* på A är en funktion $f : A \times A \to A$.

Definition. Låt A vara en mängd, låt $*$ vara en binär operator på A och låt $\sim$ vara en unär operator på A.

1. Ett element $e \in A$ är en *identitet* för $*$ om $e * a = a * e = a$ för alla $a \in A$.
2. Antag att e är en identitet och $a \in A$. Om $b \in A$ är sådant att $a * b = b * a = e$ så säger man att b är en *invers* till a m. a. p. $*$.
3. Två element a och b *kommuterar* m. a. p. $*$ om $a * b = b * a$.

4. Operatorn $*$ är *kommutativ* om a och b kommuterar för alla $a, b \in A$.

5. Operatorn $*$ är *associativ* om det för alla $a, b, c \in A$ gäller att $a * (b * c) = (a * b) * c$.

6. Den unära operatorn $\sim$ är en *involution* om det för alla $a \in A$ gäller att $\sim (\sim a) = a$.

Summasymbolen

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

tolkas som att man ska låta bokstaven k löpa genom heltalen från m till n och för vart och ett av dessa värden på k läggs termen a_k till summan. Man startar (så klart) på 0 när man tar första termen. Summan blir 0 om $n < m$. På samma sätt fungerar produktsymbolen

$$\prod_{k=m}^{n} a_k,$$

med den skillnaden att man startar på 1 och multiplicerar successivt med varje a_k för k bland heltalen från m till n. Produkten blir 1 om $n < m$.

Definition. Låt A och B vara mängder. En relation R från A till B är en delmängd till den kartesiska produktmängden $A \times B$, d. v. s.

$$R \subseteq A \times B.$$

Om $A = B$ så säger vi att R är en relation *på* A.

Definition. Man säger att en relation R på A är

- *reflexiv* om $\forall x \in A : xRx$.
- *symmetrisk* om $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$.
- *antisymmetrisk* om $\forall x, y \in A : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$.

- *transitiv* om $\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Definition. En relation som är reflexiv, symmetrisk och transitiv kallas för en *ekvivalensrelation*.

Låt R vara en relation på A och $x \in A$. *Ekvivalensklassen* av x ges av

$$[x] = \{y \in A : xRy\}.$$

Mängderna $[x]$ täcker hela A och för två olika element x och y i A gäller antingen att $[x]$ och $[y]$ är lika eller att de är *disjunkta*. En uppdelning av en mängd i disjunkta delmängder som täcker hela mängden kallas för en *partition*. Ekvivalensklasserna utgör alltå en partition av mängden A. Omvänt så gäller att en partition av en mängd A ger upphov till en ekvivalensrelation genom att man säger att två element är relaterade om och endast om de är i samma delmängd i partitionen.

Definition. En relation R på en mängd A som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv kallas för en *partiell ordning*. En partiell ordning $\preceq$ på A kallas för en *total ordning* om det för alla $x, y \in A$ gäller att $x \preceq y$ eller $y \preceq x$. Om A är en mängd och $\preceq$ är en partiell ordning på A, så säger vi att $(A, \preceq)$ utgör en *partiellt ordnad mängd*.

Om $(A, \preceq)$ är en partiellt ordnad mängd så säges ett element $m \in A$ vara ett

- *minimalt element* om det gäller för alla $a \in A$ att $a \preceq m \Rightarrow a = m$.
- *maximalt element* om det gäller för alla $a \in A$ att $m \preceq a \Rightarrow a = m$.
- *minsta element* om det gäller för alla $a \in A$ att $m \preceq a$.
- *största element* om det gäller för alla $a \in A$ att $a \preceq m$.

Antag att R_1 är en relation från A till B och att R_2 är en relation från B till C. Den *sammansatta relationen* $S = R_1 \circ R_2$ från A till C på följande sätt: Man säger att aSc, för $a \in A$ och $c \in C$, om det finns något element $b \in B$ sådant att aR_1b och bR_2c.

3.11 Övningar

1. En avståndstabell är som bekant en tabell som anger avstånden mellan olika orter. Låt A vara mängden av orter i denna tabell. Tabellen kan ses som en funktion från $A \times A$ till $\mathbb{R}$. Hur då?

2. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av att $f(x) = 3 - x$ då $x \geq 0$ och $f(x) = x^2$ då $x < 0$. Vad är $f(7)$ och $f(-7)$? Ange V_f. Ange $f((-\infty, 4])$. Är f injektiv och/eller surjektiv?

3. Följande reellvärda funktioner har alla $\mathbb{R}$ som definitionsmängd och målmängd. Vilka är injektiva, surjektiva, respektive bijektiva? Ange invers i de fall då denna existerar.

   (a) $f(x) = |x|$,

   (b) $f(x) = x^2 + 4$,

   (c) $f(x) = x^3 + 6$,

   (d) $f(x) = x + |x|$,

   (e) $f(x) = x(x-2)(x+2)$.

4. Bilda $f \circ g$ och $g \circ f$ då $f(x) = x^2 + 1$ och $g(x) = 1/(x^2 + 1)$.

5. Låt $f : A \to B$ vara en funktion och låt X och Y vara delmängder av A. Visa att $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ och att $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$. Ge ett exempel som visar att det inte alltid gäller att $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

6. Låt $f : A \to B$ vara surjektiv och definiera för varje $Y \subseteq B$

   $$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

   (Mängden $f^{-1}(Y)$ kallas för den *inversa bilden* av Y.) Visa att det alltid gäller att för alla $Y \subseteq B$ är $f(f^{-1}(Y)) = Y$. Visa att $f^{-1}(f(X)) = X$ för alla $X \subseteq A$ om och endast om f är injektiv.

7. Säg att två funktioner $f : A \to B$ och $g : C \to D$ är *lika* om $A = C$, $B = D$ och $f(x) = g(x)$ för alla $x \in A$. Låt $M = \{1, 2, 3\}$. Vilka av följande funktioner är lika?

$$
\begin{array}{ll}
f_1 : M \to \mathbb{Q}, & f_1(x) = 1/x, \\
f_2 : M \to \mathbb{Q}, & f_2(1) = 1, f_2(2) = 1/2, f_2(3) = 1/3, \\
f_3 : M \to \mathbb{Q}, & f_3(x) = -6/(x^3 - 6x^2 + 5x - 6), \\
f_4 : M \to \mathbb{Q}, & f_4(x) = 5/(x^2 + 3x + 1), \\
f_5 : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}, & f_5(x) = 1/x, \\
f_6 : M \to \mathbb{R}, & f_6(x) = 1/x,
\end{array}
$$

8. Låt f och g vara två funktioner som båda har $\mathbb{R}$ som både definitionsmängd och målmängd och som är givna av

$$f(x) = x^2 - 1$$

och

$$g(x) = |x+1| \cdot |x-1|.$$

För vilka x gäller att $f(x) = g(x)$ och vad är det största värdet som $|f(x) - g(x)|$ antar?

9. Låt $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : n = a^2 \text{ för något heltal } a\}$.

   (a) Visa att $A \subset \mathbb{Z}_+$.

   (b) Ange en bijektiv funktion $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ och dess invers $f^{-1} : A \to \mathbb{Z}_+$.

10. Antag att $|A| = a$ och $|B| = b$ och att $f : A \to B$ och $g : B \to A$.

    (a) Om $a < b$, vad kan man då säga om injektivitet och surjektivitet hos f och hos g?

    (b) Antag att $a = b$. Visa då att f är injektiv om och endast om f är surjektiv.

11. Vad utmärker grafen av en injektiv funktion?

12. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f(x) = x + a$ där $a \in \mathbb{R}$. Vad är $f^n(x)$ då $n \in \mathbb{Z}_+$?

13. En *kvadratisk* funktion är en funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ given av $h(x) = ax^2 + bx + c$ för några reella konstanter a, b och c. Låt $f(x) = x + 1$ och bestäm mängden av alla kvadratiska funktioner g som är sådana att $f \circ g = g \circ f$.

14. Låt M vara mängden av alla rätvinkliga trianglar var kateter har längder som är positiva heltal. Två trianglar i M anses vara lika om och endast om deras kateter är lika. Definiera en funktion $f : M \to \mathbb{R}$ genom att låta $f(T)$ vara arean av T. Avgör om f är surjektiv och/eller injektiv och bestäm bilden $f(M)$ av f.

15. Definiera en operator $*$ på $\mathbb{R}$ genom att sätta

$$x * y = 2xy - x - y + 1.$$

   (a) Är * kommutativ?
   (b) Är * associativ?
   (c) Finns det någon identitet?
   (d) Vilka element har en invers och vad är i så fall den?

16. Låt A vara en mängd med minst två olika element. Definiera en operator * via

$$a * b = a.$$

   Besvara samma frågor som i övning 15. Varför tillfogade vi villkoret att A skulle innehålla minst två element?

17. Låt A vara en godtycklig mängd och låt $*$ vara en operator på $\mathcal{P}(A)$ given av

$$A * B = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

   Besvara samma frågor som i övning 15.

18. Besvara frågorna (a), (b) och (c) i övning 15 för operatorn sammansättning, "$\circ$", på mängden av relationer på en mängd M.

19. Låt M vara mängden som består av talen 2, 4, 7 och 11. Vad blir $\sum_{i \in M} i$? Vad blir $\prod_{i \in M} i^2$?

20. Låt A vara en mängd med n element. Hur många relationer på A finns det?

21. Visa att en relation R är transitiv om och endast om $R \circ R \subseteq R$.

22. Låt R vara relationen på $\mathbb{R}^2$ definierad av att $(a, b)R(c, d)$ om $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

(a) Visa att R är en ekvivalensrelation.
(b) Rita ekvivalensklassen som innehåller $(1, 1)$ i ett koordinatsystem.
(c) Beskriv ekvivalensklasserna geometriskt.
(d) Ge en mängd med exakt ett element ur varje ekvivalensklass.

23. Låt R vara relationen på $\mathbb{R}^2$ given av att $(a, b)R(c, d)$ om $\max(|a|, |b|) = \max(|c|, |d|)$.
    (a) Visa att R är en ekvivalensrelation.
    (b) Rita ekvivalensklassen som innehåller $(1, 1)$ i ett koordinatsystem.
    (c) Beskriv ekvivalensklasserna geometriskt.
    (d) Ge en representant ur varje ekvivalensklass.

24. Låt R vara den relation på $\mathbb{Z}_+^2$ som är given av att $(a, b)R(c, d)$ om $a + d = b + c$. Visa att detta är en ekvivalensrelation. Med denna relation kan man på ett naturligt sätt identifiera varje par $(a, b) \in \mathbb{Z}_+^2$ med ett element i $\mathbb{Z}$. Vilket då?

25. Ge ett exempel på en partiellt ordnad mängd $(A, \preceq)$ som har exakt ett minimalt element som ändå inte är ett minsta element.

26. Låt $|$ vara den relation på $\mathbb{Z}_+$ som ges av att $a|b$ om det finns något positivt heltal n så att $b = na$ (se avsnitt 7.1). Visa att $(\mathbb{Z}_+, |)$ är en partiellt ordnad mängd.

27. Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och låt $R_1 = \{(1, 2), (2, 3)\}$ vara en relation på A. Skapa om det går en relation R_2 på A sådan att $(1, 3) \in R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.

Den är däremot inte en ekvivalens. Sätt t. ex. $P(x) : x > 0$ och $Q(x) : x < 0$ och universum heltalen. Då är uppenbarligen $[\exists x : P(x)] \wedge [\exists x : Q(x)]$ sann, men $\exists x : [P(x) \wedge Q(x)]$ är falsk då inget tal är både positivt och negativt.

13. (a) falskt, (b) sant, (c) falskt, (d) sant, (e) sant.

14. (a) giltigt, (b) ogiltigt, (c) giltigt, (d) giltigt.

    Det sista är av samma form som exemplet med matematiker, knäppskallar och folk som bor i Göteborg.

15. (b) Vi har redan visat att varje sanningstabell kan fås med hjälp av $\neg$ och $\vee$. I (a) visade vi att man kan ersätta båda dessa två med enbart NAND-operatorn och alltså kan varje sanningstabell fås med hjälp av enbart denna.

    (c) Visa att $\neg p \Leftrightarrow p \& p$ och $p \vee q \Leftrightarrow (p \& q) \& (p \& q)$.

16. (a) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$

    (b) $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

    (c) $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee$
    $\vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

    (d) $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee$
    $\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

11.2 Kapitel 2

1. (a) 8, 9, 10, 11 (b) mängden är tom (c) alla heltal större än 8 (d) 5, 6, 7, 8

2. (a) sant (b) sant (c) falskt (d) sant (e) falskt (f) sant (g) falskt (h) falskt

3. Vi tar det femtonde påståendet som exempel: $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, där den andra ekvivalensen följer av känt faktum om operatorer med logiska påståenden.

4. $|A \times B| = mn$ och $|\mathcal{P}(A)| = 2^{mn}$.

5. Den första likheten är korrekt, medan den andra inte alltid gäller. Ett motexempel mot den andra likheten får man om man sätter $A = B = C = \{1\}$. För att visa den första: $x \in A \cap (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \setminus C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

6. $A \cap B = A$, $A \setminus B = \emptyset$ och $A \cup B = B$.

7. $A = \{a, c, k, s, t, v, x\}$, $B = \{b, f, s, t, v, x\}$.

8. 23 element.

9. Om $A \neq B$ finns det ett element $x \in A$ som inte finns i B, eller tvärtom. I det första fallet gäller att $\{x\}$ finns i $\mathcal{P}(A)$ men inte i $\mathcal{P}(B)$ och i det andra fallet gäller det omvända förhållandet.

10. $|A \cup B| = a + b - c$.

11.3 Kapitel 3

1. Eftersom $A \times A = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in A\}$ kan vi låta $f(x, y)$ vara avståndet mellan x och y.

2. Funktionen är surjektiv men inte injektiv. $f(-7) = (-7)^2 = 49$, $f(7) = 3 - 7 = -4$, $V_f = \mathbb{R}$, $f((-\infty, 4]) = [-1, \infty)$.

3. (a) varken injektiv eller surjektiv (b) varken injektiv eller surjektiv (c) bijektiv, inversen är $f^{-1}(x) = (x - 6)^{1/3}$ (d) varken surjektiv eller injektiv (e) surjektiv men inte injektiv.

4. $f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 1 = 1/(1 + x^2)^2 + 1$, $g \circ f(x) = g(f(x)) = 1/(f(x)^2 + 1) = 1/((x^2 + 1)^2 + 1)$.

5. Först observerar vi att om $C_1 \subseteq C_2 \subseteq A$ gäller att $f(C_1) \subseteq f(C_2)$; detta följer omedelbart av definitionen av dessa mängder. Därför gäller att $f(X \cap Y) \subseteq f(X)$ och att $f(X \cap Y) \subseteq f(Y)$ vilket i sin tur medför att $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$. Ett motexempel (bland oändligt många andra) mot den omvända inklusionen ges av $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = (-1, 0)$ och $B = (0, 1)$.

   För att visa att $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$ används samma teknik som nyss. För att visa att $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$ observerar vi att för alla $y \in f(X \cup Y)$ gäller att $y = f(a)$ för något element $a \in X \cup Y$. Att $a \in X \cup Y$ betyder att $a \in X$ eller att $a \in Y$. I det första fallet gäller att $y = f(a) \in f(X)$ och det andra att $y = f(a) \in f(Y)$ så att det i bägge fallen gäller att $y \in f(X) \cup f(Y)$.

6. Vi tar den första deluppgiften. Eftersom f är surjektiv gäller att $f^{-1}(Y)$ inte är tom såvida inte Y själv är tom (och då är likheten $f(f^{-1}(Y)) = Y$ trivialt sann). Om nu $y \in Y$ finns det alltså ett $x \in X$ sådant att $y = f(x)$ så per definition gäller att $x \in f^{-1}(\{y\}) \subseteq f^{-1}(Y)$. Därför gäller att $f(x) \in f(f^{-1}(Y))$, d. v. s. $y \in f(f^{-1}(Y))$.

   Å andra sidan om $y \in f(f^{-1}(Y))$ så gäller att $y = f(x)$ för något $x \in f^{-1}(Y)$. Att $x \in f^{-1}(Y)$ betyder per definition att $f(x) \in Y$, d. v. s. $y \in Y$.

7. Funktionerna f_1, f_2 och f_3 är lika.

8. De två funktionerna är lika så $x \leq -1$ eller $x \geq 1$. I övriga fall gäller att $|f(x) - g(x)| = 2(1 - x^2)$ som blir som störst 2, vilket sker då $x = 0$.

9. Att $A \subseteq \mathbb{Z}_+$ är ju glasklart från definitionen så man behöver bara visa att det finns ett positivt heltal b som inte ligger i A. Ett sådant är till exempel 3 eftersom det inte gäller att $3 = a^2$ för något heltal a. En bijektiv funktion är $f(a) = a^2$ var invers är $f^{-1}(a) = \sqrt{a}$.

10. (a) Eftersom $|f(A)| \leq a < b$ kan inte f vara surjektiv. På samma sätt kan inte g vara injektiv ty om så vore fallet skulle det gälla att $|g(B)| = |B| = b$ vilket motsäger att $g(B) \subseteq A$. I övrigt kan vi inte säga något definitivt utan känna till f och g specifikt.

    (b) f är injektiv om och endast om $f(x) \neq f(y)$ för alla $x \neq y$, i detta fall om och endast om $|f(A)| = |A| = |B|$ vilket sker om och endast om $f(A) = B$ d. v. s. om f är surjektiv.

11. Olika punkter på grafen har olika y-koordinater.

12. $f^n(x) = x + an$

13. Den sökta mängden är $\{x + c : c \text{ konstant}\}$.

14. Om T har kateterlängderna a och b gäller att $f(T) = ab/2$. Funktionen är inte injektiv eftersom exempelvis en triangel med kateterlängderna 1 och 4 har samma area som en där bägge kateterna har längd 2. Den är inte heller surjektiv eftersom alla tänkbara areor av trianglar i M är av typen $c/2$ där c är ett heltal. Bilden är just $f(M) = \{c/2 : c \in \mathbb{Z}_+\}$.

15. Både kommutativ och associativ. Talet 1 är identitet. Alla element $x \neq 1/2$ har inversen $x^{-1} = x/(2x-1)$. För 1/2 saknas invers.

16. Associativ men inte kommutativ. Identitet saknas och därmed även inverser. Om mängden bara innehållit ett enda element skulle operatorn trivialt varit kommutativ och haft identitet och invers.

17. Associativ och kommutativ. Tomma mängden är identitet. Denna har sig själv som invers, i övrigt saknas inverser.

18. Associativ men inte kommutativ. Likhetsrelation är identitet. De relationer som har invers är de som svarar mot grafer till inverterbara funktioner och inversen är den relation som svarar mot grafen till den inversa funktionen.

19. $\sum_{i\in M} i = 2+4+7+11 = 24$, $\prod_{i\in M} i^2 = 2^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = 379456$.

20. En relation är ju en delmängd till $A \times A$, d. v. s. ett element i $\mathcal{P}(A \times A)$. Eftersom det finns n^2 element i $A \times A$ finns det alltså totalt 2^{n^2} olika relationer.

21. Om R är transitiv och $(x, y) \in R \circ R$ gäller att det finns ett element z sådant att xRz och zRy vilket tack vare transitiviteten medför att xRy, d. v. s. $(x, y) \in R$. Alltså gäller att $R \circ R \subseteq R$. Å andra sidan om $R \circ R \subseteq R$, xRy och yRz gäller per definition av $R \circ R$ att $(x, z) \in R \circ R$ vilket då medför att $(x, z) \in R$, d. v. s. xRz. Alltså är R transitiv.

22. R är trivialt reflexiv då ju $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$. Symmetrin är också uppenbar. Transitiviteten är också rättfram: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ och $c^2 + d^2 = e^2 + f^2$ medför trivialt att $a^2 + b^2 = e^2 + f^2$. Ekvivalensklasserna utgörs av alla cirklar centrerade kring