Topologisk ordning

Given en riktad graf (V,E).

Definition. En *topologisk ordning* av grafen är en sekvens av alla noder i V:

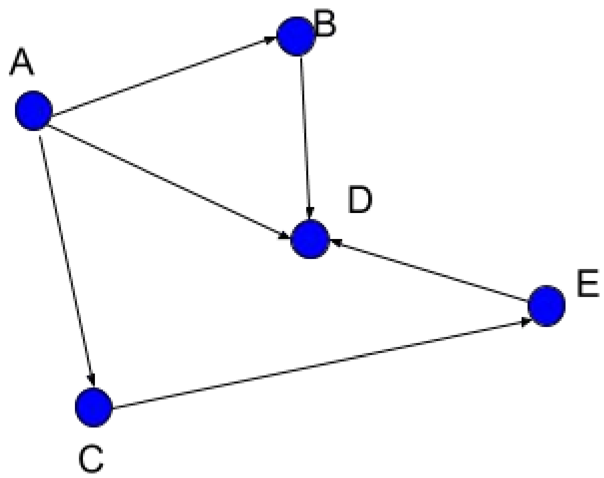
$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$$

sådant att alla pilarna i E i grafen pekar från vänster till höger i sekvensen. Uttryckt logiskt:

$$\text{för alla } 1 \le i, j \le n : [\, (v_i, v_j) \in E \;\Rightarrow\; i < j \,]$$

M.a.o., pilar i grafen får peka från v_1 till v_5 och från v_3 till v_4 (eftersom 1 < 5 och 3 < 4), men inte från v_6 till v_2 eller från v_7 till v_6 (eftersom 6 ≥ 2 och 7 ≥ 6).

Exempel.

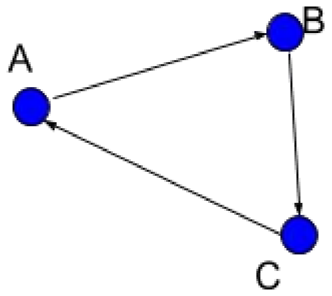


En topologisk ordning av grafen är A, B, C, E, D. En annan topologisk ordning är A, C, B, E, D.

Men A, E, B, C, D är ingen topologisk ordning eftersom det finns en pil från C till E men E förekommer före C i sekvensen.

När finns en topologisk ordning?

Alla riktade grafer har inte nödvändigtvis en topologisk ordning. Här är ett exempel:



I denna graf kan vi inte ordna A,B,C eftersom någon nod måste komma sist samtidigt som att ingen nod kan komma sist eftersom alla noder pekar på någon annan nod. Detta betyder i sin tur att grafen måste innehålla en cykel, som gör det omöjligt att bestämma ordning.

Sats. En riktad graf har en topologisk ordning om och endast om grafen inte innehåller några riktade cykler.

Anmärkning. En riktad graf utan cykler kallas också en *riktad acyklisk graf* eller, på engelska, *directed acycic graph* (DAG).

Beviset av satsen ges utav följande två hjälpsatser.

Hjälpsats 1. Om grafen har en riktad cykel, då är det omöjligt att hitta en topologisk ordning.

Bevis. Detta kan vi se med hjälp av ett motsägelsebevis. Anta att grafen har en cykel och en topologisk ordning. Kolla nu var noderna från cykeln ligger i den topologiska ordningen, och ta den noden v som ligger sist i ordningen. Den noden pekar ju på en annan nod u i cykeln, som måste ligga före i den topologiska ordningen. Detta är omöjligt. □

Hjälpsats 2. Om grafen inte har en riktad cykel, då finns det en topologisk ordning.

Beviset för hjälpsats 2 lämnar vi till nästa stycke.

Att skapa en topologisk ordning

För att kunna skapa en topologisk ordning definierar vi följande begrepp.

Given en riktad graf (V,E).

Definition. En *enstöring* är en nod v i V sådant att det inte finns några noder u i V som pekar på v. Uttryckt i logik:

för alla $u \in V : (u,v) \notin E$

En enstöring är en bra kandidat för att börja en topologisk ordning med; ingen pekar ju på den!

Det visar sig att det alltid finns minst en enstöring i en riktad graf utan cykler.

Sats. I en riktad acyklisk graf med minst en nod finns det alltid minst en enstöring.

Bevis. Med hjälp av motsägelsebevis. Anta att vi har en riktad graf utan cykler och utan enstöringar. Ta vilken nod som helst. Någon nod måste peka på den (eftersom vi inte har några enstöringar), ta någon av de noderna. Upprepa denna process. Eftersom vi bara har ändligt många noder, och processen aldrig tar slut, måste vi så småningom komma tillbaka till en nod som vi redan har sett. Men då har vi också hittat en cykel i grafen. Detta strider mot vårt antagande. □

Då kan vi nu göra beviset för hjälpsats 2.

Hjälpsats 2 (upprepad). Om grafen inte har en riktad cykel, då finns det en topologisk ordning.

Bevis. Med induktion över antalet noder n i grafen G.

Basfall: n=0. Då är grafen tom, och vi tar den tomma sekvensen som topologisk ordning.

Stegfall: n=k+1, k≥0. Induktionshypotesen (I.H.) säger att för varje acyklisk graf med k noder finns det en topologisk ordning.

Nu tar vi en acyklisk graf med n (=k+1) noder. Enligt satsen om enstörningar finns det minst en enstörning v i grafen. Vi skapar nu en ny graf G’ där vi tar bort v och alla pilar från v. G’ har k noder och är fortfarande acyklisk.

Enligt I.H. finns det då en topologisk ordning för grafen G’. Vi skapar en topologisk ordning för grafen G genom att börja med noden v (som vi tog bort) och sen tar vi noderna från G’ i den topologiska ordningen. Detta är en topologisk ordning för G också eftersom ingen i G’ pekar på v. □

Vi har alltså visat att varje graf med en topologisk ordning inte har några cykler, och att varje graf utan cykler har en topologisk ordning. Dessutom har vi visat att varje graf utan cykel måste ha en enstöring.

Det sista gäller inte åt andra hållet: Det finns grafer med cykler som ändå har enstöringar. Kan du hitta ett sådant exempel?