Svaren till Mini-Tentan

Diskret Matematik för Datavetare

September 25, 2015

10:00 - 12:00

Uppgift 1

(a) Nej. T.ex. kan resultatet 0 inte nås:

$f(n) = 0$
$\Rightarrow 2n+1 = 0$
$\Rightarrow n = -\frac{1}{2}$, som inte är med i funktionens definitionsmängd.

(b) Ja. Om vi har två argument n och m som har samma resultat:

$f(n) = f(m)$
$\Rightarrow 2n+1 = 2m+1$
$\Rightarrow n = m$, alltså måste de vara lika.

Uppgift 2

(a) Formeln kan förenklas till $p \rightarrow q$.

(b)

p	q	p /\ q	p -> (p /\ q)	p -> q
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

de sista två kolmumnerna är identiska.

Uppgift 3

(a) $\forall p, q \in \mathbb{N} : [(\text{Prim}(p) \land \text{Prim}(q)) \rightarrow \text{Even}(p+q)]$

(b) Nej. Ta p = 2 och q = 3. Båda är primtal men 2+3 är inte jämnt.

Uppgift 4

(a) $\sum_{i=0}^{n} 2i$

(b)
att visa: $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n(n+1)$, för $n \geq 1$.

bevis: med induktion över n

basfall: $n=1$. $2 = 1\cdot(1+1)$. OK.

stegfall: $n = k+1$, $k \geq 1$.

1. I.H. säger att $2 + 4 + \ldots + 2k = k(k+1)$.

2. Titta nu på:

$2 + 4 + \ldots + 2n$

$= (2 + 4 + \ldots + 2k) + 2(k+1)$ [pga. n = k+1]

$= k(k+1) + 2(k+1)$ [pga. I.H.]

$= (k+1)(k+2)$ [pga. n = k+1]

$= n(n+1)$

som vi skulle bevisa.
□

Uppgift 5

(a) Den har ingen lösning eftersom $7 \mid 14$ och $7 \mid 21$, alltså $7 \mid (14x + 21y)$.
Men $7 \nmid 30$.

(b) Den har lösningar.

$$9x + 15y = 21$$

$$\Rightarrow 3x + 5y = 7 \qquad [\text{ dela allt med 3 }]$$

Nu finns det två sätt att gå vidare.

Sätt 1: Efter några försök hittar vi t.ex. $x=4$ och $y=-1$ som är en lösning.

För att få fram fler lösningar kan vi skriva om vår ekvation:

$$x = (7 - 5y) / 3$$

Vi har redan en lösning för y (nämligen -1) sådant att högerledet på ovanstående ekvation blir ett heltal. Eftersom vi delar med 3 där kan vi få fram fler lösningar genom att plussa på 3 (eller dra av 3) på en redan befintlig lösning.

Andra lösningar är då t.ex. $y=2$ $(-1 + 3)$ och $y=-4$ $(-1 - 3)$, och tillhörende x i de fallen är $x=-1$ resp. $x=9$.

Sätt 2: Vi löser följande ekvation först:

$$3u + 5v = 1$$

Detta gör vi genom att använda Euklides algoritm och Bezout's identitet. Först räknar vi ut sgd(3,5):

3	5	start!
3	2	(2 = 5-3)
1	2	(1 = 3-2)
1	1	(1 = 2-1)
1	0	(0 = 1-1)

Svaret är alltså 1! Sen anpassar vi tabellen så att vi kan räkna ut u och v:

(u,v)			(u,v)
(1,0)	3	5	(0,1)
	3	2	(-1,1)
(2,-1)	1	2	
	1	1	
	1	0	

Vi avslutar där eftersom vi nu har ett lämpligt u och v: 2 och -1. Vi vet alltså att $3 \cdot 2 + 5 \cdot -1 = 1$.

Vi har alltså hittat u och v sådant att $3u + 5v = 1$. Men vi vill hitta x och y sådant att $3x + 5y = 7$! Inga problem, vi multiplicerar bara allt med 7:

$$x = 7 \cdot u = 7 \cdot 2 = 14$$
$$y = 7 \cdot v = 7 \cdot -1 = -7$$

Detta är en lösning!

För att hitta fler lösningar, kan vi använda oss av:

$$x' = x + 5$$
$$y' = y - 3$$

eller:

$$x' = x - 5$$
$$y' = y + 3$$

Låt oss göra både och, då får vi två till lösningar nämligen x=19, y=-10 och x=9, y=-4.