Föreläsning
Datastrukturer (DAT037)

Nils Anders Danielsson

2015-11-02

Motivation

Varför studera datastrukturer?

- Snabbt.
- Lite minne.
- Mindre energiförbrukning.
- Billigare.
- Och korrekt!

Exempel

```
public class Bits {

    public static void main(String[] args) {

        int n = Integer.parseInt(args[0]);

        String bits = new String();

        for (int i = 0; i < n; i++) {
            bits += i & 1;
        }

        System.out.print(bits);

    }
}
```

Hur lång tid tar det att köra ”java Bits 200000”, jämfört med ”java Bits 100000”?

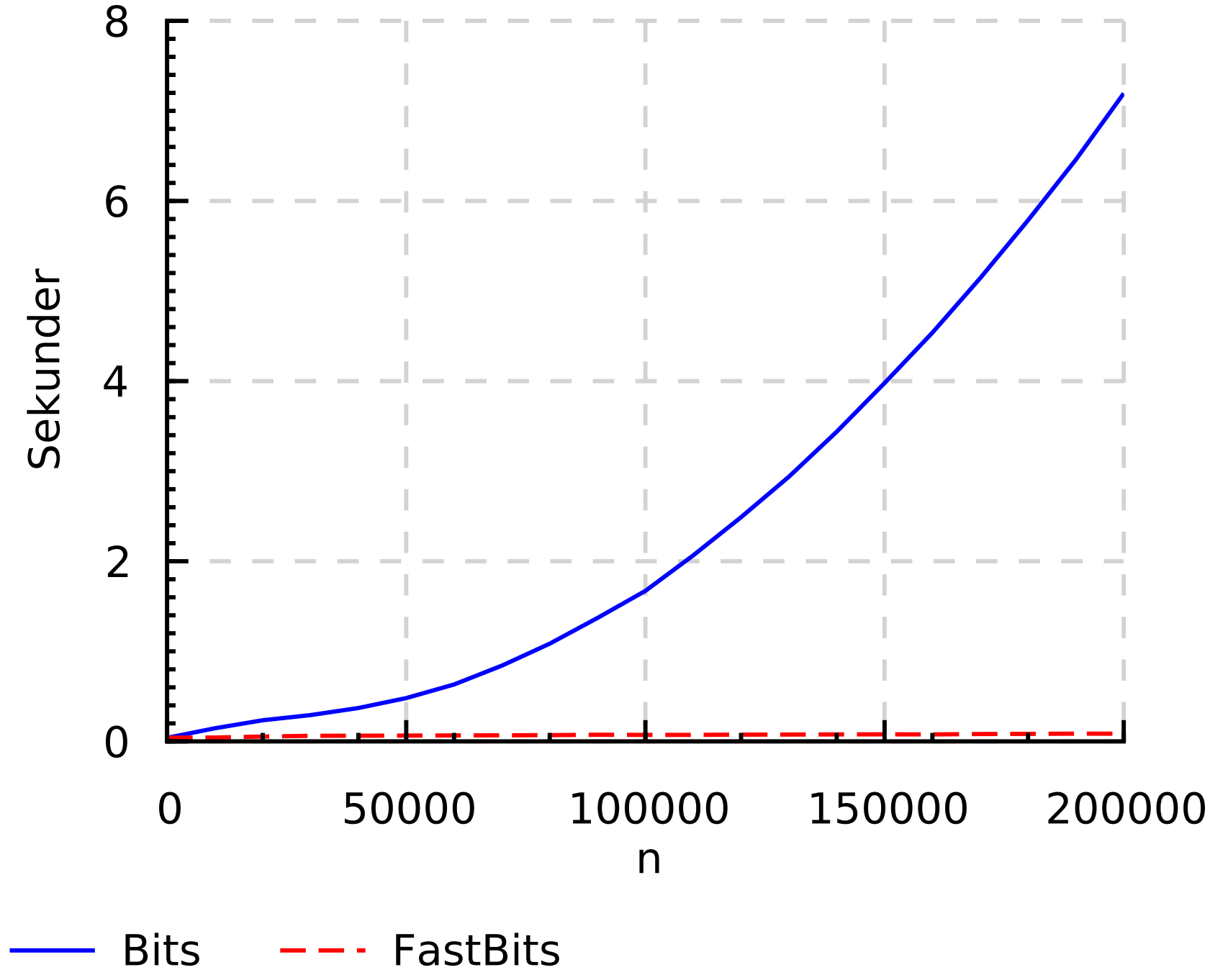
- Lika snabbt, 2 eller 4 ggr långsammare?
- Fundera ett tag.
- Gå sedan till `http://pingo.upb.de/`.
- Ange en kod som jag ger er.
- Svara på frågan.

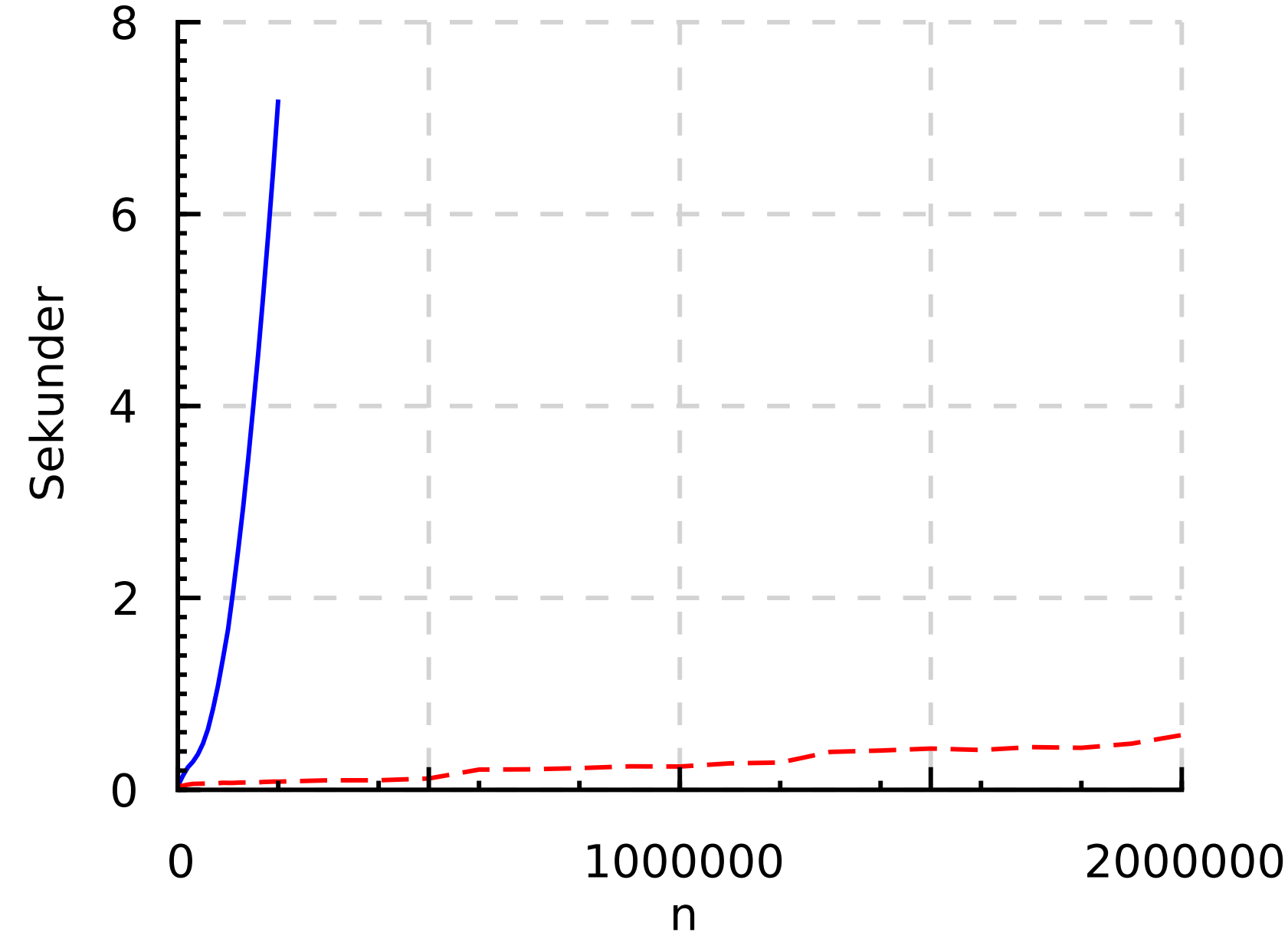
Dåligt val av datastruktur

```
public class Bits {

    public static void main(String[] args) {

        int n = Integer.parseInt(args[0]);

        String bits = new String();

        for (int i = 0; i < n; i++) {
            bits += i & 1;
        }

        System.out.print(bits);

    }
}
```

Bättre val av datastruktur

```
public class FastBits {

    public static void main(String[] args) {

        int n = Integer.parseInt(args[0]);

        StringBuffer bits = new StringBuffer();

        for (int i = 0; i < n; i++) {
            bits.append(i & 1);
        }

        System.out.print(bits);

    }
}
```


8
6
4
2
0
Sekunder
0
50000
100000
150000
200000
n
Bits
FastBits


8
6
4
2
0
Sekunder
0
1000000
2000000
n
Bits
FastBits

Motivation

I kursen får ni verktyg för att:

- Förutse (ungefär) hur snabbt (vissa av) era program kommer att gå.
- Göra (vissa) program mer effektiva.

Administrativt

Kurshemsidan.

Tillbaka till exemplet

```
private char[] string;

public void append(char c) {
  char[] temp = new char[string.length + 1];

  for (int i = 0; i < string.length; i++) {
      temp[i] = string[i];
  }
  temp[string.length] = c;

  string = temp;
}
```

Tillbaka till exemplet

```
private char[] string;

public void append(char c) {
  char[] temp = new char[string.length + 1];   // ~ n

  for (int i = 0; i < string.length; i++) {    // ~ 3n
      temp[i] = string[i];
  }
  temp[string.length] = c;                     // 1

  string = temp;                               // 1
}
```

Totalt (för $n = \texttt{string.length}$): $\sim 4n$.

Tillbaka till exemplet

```
private char[] string;

public void append(char c) {
  char[] temp = new char[string.length + 1];   // ~ n

  for (int i = 0; i < string.length; i++) {    // ~ 3n
      temp[i] = string[i];
  }
  temp[string.length] = c;                     // 1

  string = temp;                               // 1
}
```

Totalt (för $n = \texttt{string.length}$): $\sim n$.

Tillbaka till exemplet

```
String bits = new String();          // 1

for (int i = 0; i < n; i++) {        // ???
    bits += i & 1;                   // ~ i
}

System.out.print(bits);              // ~ n
```

???

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = 0 + 1 + 2 + ... + (n-1)$$

$$= n\frac{n-1}{2}$$

$$\sim n^2$$

Tillbaka till exemplet

```
String bits = new String();          // 1

for (int i = 0; i < n; i++) {        // ~ n^2
    bits += i & 1;                   // ~ i
}

System.out.print(bits);              // ~ n
```

Totalt: $\sim n^2$.

Tillbaka till exemplet

```
String bits = new String();          // 1

for (int i = 0; i < n; i++) {        // ~ n^2
    bits += i & 1;                   // ~ i
}

System.out.print(bits);              // ~ n
```

Totalt: $\sim n^2$.

Anta att vi kan utföra $\sim 10^6$ “instruktioner”/s.
$n = 10^5 \Rightarrow \sim 3$ timmar
$n = 10^6 \Rightarrow \sim 10$ dagar
$n = 10^7 \Rightarrow \sim 3$ år

Analys

- Verkar onödigt att kopiera arrayen varje gång.
- När vi kopierar kan vi lägga till några extra “tomma” element i slutet av arrayen, så att vi inte behöver kopiera lika ofta.
- Låt oss göra arrayen dubbelt så stor.

Dubbelt så stor

```
private char[] string;
private int    length;

public void append(char c) {
  if (length == string.length) {
    char[] temp = new char[2 * string.length];

    for (int i = 0; i < string.length; i++) {
        temp[i] = string[i];
    }

    string = temp;
  }

  string[length++] = c;
}
```

Dubbelt så stor

```
String bits = new String();          // 1

for (int i = 0; i < n; i++) {        // n + ???
    bits += i & 1;
}

System.out.print(bits);              // ~ n
```

???

Anta att n är en jämn tvåpotens, $n = 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} 2^i &= 2 + 4 + ... + 2^k \\ &= 2^{1+k} - 2 \\ &= 2n - 2 \\ &\sim n\end{aligned}$$

Dubbelt så stor

```
String bits = new String();          // 1

for (int i = 0; i < n; i++) {        // ~ n
    bits += i & 1;
}

System.out.print(bits);              // ~ n
```

Totalt: $\sim n$.

Anta att vi kan utföra 10^6 “instruktioner”/s.
$n = 10^6 \Rightarrow \sim 1$ sekund
$n = 10^9 \Rightarrow \sim 20$ minuter
$n = 10^{12} \Rightarrow \sim 10$ dagar

Datastrukturer

- `String`: `append` kopierar varje gång.
  Kan ej ändras: “immutable”.
- `StringBuffer`: `append` kopierar sällan.
  Dynamisk array.

Blir programmet effektivt om vi lägger till 10 element istället för att göra arrayen dubbelt så stor?

- Fundera ett tag.
- Svara sedan på `http://pingo.upb.de/`.

Asymptotisk komplexitet

Kursen fokuserar på *asymptotisk* komplexitet:
vad händer när storleken går mot oändligheten?

$$\begin{aligned} 8n + 3 &\quad \Rightarrow \quad O(n) \\ 4n^2 + 3n + 6 &\quad \Rightarrow \quad O(n^2) \end{aligned}$$

Ordo-notation (en variant)

$T(n) = O(f(n))$

om och endast om

det finns ett naturligt tal n_0

och ett reellt tal $c > 0$

så att $T(n) \leq cf(n)$ för alla $n \geq n_0$.

Ω

$T(n) = \Omega(f(n))$

om och endast om

det finns ett naturligt tal n_0

och ett reellt tal $c > 0$

så att $T(n) \geq cf(n)$ för alla $n \geq n_0$.

$T(n) = \Theta(f(n))$

om och endast om

$T(n) = O(f(n))$ och $T(n) = \Omega(f(n))$

Exempel

Kan använda Θ för att uttrycka resultatet av tidigare analyser:

- `Bits`: $\Theta(n^2)$.
- `FastBits`: $\Theta(n)$.

Exempel

Kan använda Θ för att uttrycka resultatet av tidigare analyser:

- `Bits`: $\Theta(n^2)$.
- `FastBits`: $\Theta(n)$.

Vad är bäst: $\Theta(n)$ eller $\Theta(n^2)$?

Vilka påståenden är korrekta?

- $n^2 = O(n)$
- $n^2 = \Omega(n)$
- $n = O(n^2)$
- $n = \Omega(n^2)$
- $10n + 7 = \Theta(3n + 1)$
- $10n + 7 = \Theta(13n + 12)$

Svara på `http://pingo.upb.de/`.

Asymptotisk notation

Notera:

$$1 = O(n)$$
$$1 = O(n^2)$$
$$n = O(n \log n)$$
$$n = O(n^2)$$

Ordonotation: regler

Om $T(n)$ är ett polynom av grad k:

$$T(n) = O(n^k).$$

- $7n^2 + 3n + 2 = O(n^2)$.
- $0.1n^3 + 1000 = O(n^3)$.

Ordonotation: regler

Om $k > 0$ är en *konstant*:

$$(\log_2 n)^k = O(n) \quad \text{(ej } \Theta(n)\text{)},$$
$$\log_2(n^k) = k \log_2 n = O(\log n).$$

För konstant $a > 1$:

$$\log_a n = \log_2 n / \log_2 a = O(\log_2 n) = O(\log n).$$

- $(\log_2 n)^{10000} = O(n)$.
- $\log_2(n^{10000}) = O(\log n)$.

Ordonotation: regler

Om $T(n) = O(f(n))$ och $U(n) = O(g(n))$:

$$\begin{aligned} T(n) + U(n) &= O(f(n) + g(n)) \\ &= O(\max(f(n), g(n))), \\ T(n)U(n) &= O(f(n)g(n)). \end{aligned}$$

- $7n^2 + 3n^2 = O(n^2 + n^2) = O(n^2)$.
- $2n^3 + (\log_2 n)^{1000} = O(n^3 + n) = O(n^3)$.
- $2n^3 \log_7 5n^2 = O(n^3 \log n)$.

Vilka analyser är korrekta?

A

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < n; j++) {
        a[i][j] = i*j;
    }
}
```

$\Theta(n)$

$\Theta(n^2)$

B

```
for (int i = 0; i < 7; i++) {
    for (int j = 0; j < n; j++) {
        a[i][j] = i*j;
    }
}
```

$\Theta(n)$

$\Theta(n^2)$

Svara på `http://pingo.upb.de/`.

Tidskomplexitet

Hur analyserar man tidskomplexitet?

- *Mäta*.
  Nackdelar: Kan vara tidskrävande,
  kanske inget bra stöd för design.
- *Räkna instruktioner*.
  Nackdelar: Komplicerat.
- *Förenklad modell*.
  Nackdelar: Inte tillämpligt i alla lägen.

Uniform kostnadsmodell

- Enkel dator.
- Varje instruktion tar en tidsenhet.
  Bara enkla instruktioner,
  men godtyckligt stora tal.
- Oändligt minne.

Uniform kostnadsmodell

- Enkel dator.
- Varje instruktion tar en tidsenhet.
  Bara enkla instruktioner,
  men godtyckligt stora tal.
- Oändligt minne.

- Inte realistisk.
- Fungerar ganska bra om man är försiktig.
- Används ofta i kursen.

Logaritmisk kostnadsmodell

- Enkel dator.
- Tid beräknas i termer av indatas storlek, räknat i antal bitar.
- Oändligt minne.
- Lite mer realistisk, lite krångligare.

Begränsningar

- I/O.
- Cacheminnen.

Amorterad tidskomplexitet

- Tidskomplexitet för att lägga till n element till en tom dynamisk array: $\Theta(n)$.
- Tidskomplexitet för att lägga till ett element: $O(\ell)$, där ℓ är antalet element i arrayen.
- *Amorterad* tidskomplexitet för att lägga till ett element: $O(1)$.

Bokföringsmetoden

- Man kan låta tidiga, billiga operationer "betala" för dyra, sena.
- Efter dubblering:
  n snabba insättningar,
  1 dubblering.
- Insättning: Lägg ett mynt på cellen, och ett på en "gammal" cell.
- Kopiering: Har ett mynt på varje cell, kopieringen betald.

Amorterad tidskomplexitet

- Vissa operationer långsamma:
  kan vara problematiskt i realtidssammanhang.
- Gamla tentor m m: potentialmetoden.

Dynamiska arrayer med `remove`

Har `add` och `remove` amorterade tidskomplexiteten $O(1)$ om man halverar arrayen när den blir...

- ...halvfull?
- ...kvartsfull?

Varför?

Sammanfattning

- Dynamiska arrayer.
- Asymptotisk komplexitet/ordo-notation.
- Kostnadsmodeller.
- Amorterad tidskomplexitet.