Institutionen för
Datavetenskap
MB/mb

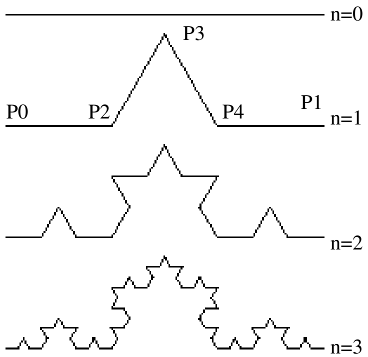
1989-03-07, 1989-12-14, 2001-02-10

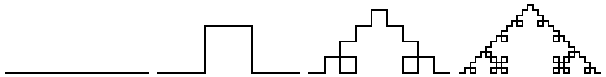
FRAKTALER OCH KAOS

Det här pappret handlar om till synes onyttiga saker, men avslöjar samtidigt nya sanningar. Och om inte annat kommer det fram att datorgrafik kan användas för diverse upptäckter. Texten skrevs ursprungligen 1989-03-07. Våren 2000 transporterade jag den inklusive bilder från en Mac till FrameMaker på SUN. Och har därmed kunnat utsätta den för viss bearbetning. Fraktaler har attraherat även seriösa matematiker, som skrivit djupsinnigheter. Men vi tar lätt på det mesta.

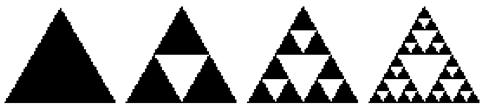
1. FRAKTALER

Fraktal (av latinets *fractus* = bruten) är en benämning som infördes av matematikern Benoit Mandelbrot 1975 i boken "Fractals: Form, Chance, and Dimension" för att beteckna diverse objekt. Typiskt är en fraktal taggig eller har hål. Viktigast är dock att objektet är självlikformigt (eng. self-similar), dvs förstoras objektet (vilket betyder att man ser på det i en annan skala) framträder nya detaljer som påminner om det ursprungliga. Objektet kan också sägas upprepa sig självt. Mandelbrot påminde om från sekelskiftet stammande kurvkonstruktioner som Kochs snöflingor och Sierpinski-mattor, se figuren nedan.





n=0 n=1 n=2 n=3



n=0 n=1 n=2 n=3

Även naturen uppvisar fraktala inslag, t ex en kustlinje, en ormbunke eller ett bergsmassiv.

Många (men inte alla) fraktala objekt kan ses som en familj av objekt av olika ordningar. Se figuren ovan, där *n* står för ordningsnumret. Typiskt är härvid att det finns en **generator**, som styr övergången från en ordning till nästa. I figurens fall är generatorn objektet med ordningsnumret n=1. I översta fallet ersätts varje linjestycke med en förminskad version av generatorn och ger nästa objekt. I andra fallet ersätts varje svart triangel av generatorn (förminskad). Från programmeringssynpunkt är det dock oftast bättre att se framväxten av nya objekt som en rekursiv process. I andra fallet får vi objektet med ordningsnumret k+1 genom att byta de svarta trianglarna i generatorn mot objektet med ordningsnumret k (förminskat). En enkel procedur i C för uppritningen kan ha formen (de tre första parametrarna kan alternativt vara heltal):

```
void Sierpinski(float x,float y,float sida,int n) {
     lokala variabler
     if  (n==0)  rita en svart triangel;
     else {
          Beräkna tre hörn (x1,y1),(x2,y2),(x3,y3)
          sida=sida/2;
          Sierpinski(x1,y1,sida,n-1);
          Sierpinski(x2,y2,sida,n-1);
          Sierpinski(x3,y3,sida,n-1);
     }
}
```

2. DYNAMISKA SYSTEM OCH KAOS

Kaos är benämningen på fenomen som periodvis ägnas ett betydande tvärvetenskapligt intresse.

Kaos rör egenskaper hos **dynamiska system**, dvs förlopp som kan beskrivas med tillståndsvariabler som förändrar sig med (vanligen) tiden. Systemet kan vara kontinuerligt eller diskret. Ett kontinuerligt system kan diskretiseras. Vi ser fortsättningsvis bara på det diskreta fallet. Beteckna tillståndsvariabeln, som är en vektor, med X och dess värde vid ett visst tillfälle n med X_n. Då antas gälla

$X_{n+1} = F(X_n) \quad n \geq 1$

X_0 given

där F är en given funktion.

Exempel på sådana förlopp är en pendels rörelse eller väderleken på vår planet. I allmänhet är realistiska modeller icke-linjära. Medan linjära modeller är enkla att analysera och inte bjuder på några överraskningar (annat än att de inte är tillräckligt goda), har icke-linjära dynamiska system ofta överraskande egenskaper. En vanlig uppfattning är att man med goda begynnelsevillkor kan förutsäga framtiden för ett dynamiskt system. Denna uppfattning torde åtminstone delvis styrt viss väderleksprognosverksamhet. Edward Lorenz visade på 1960-talet att detta inte gäller generellt och demonstrerade att väderleksprognoser inte kan vara annat än kortsiktiga. Han lade också grunden till forskning kring kaos. Flera år senare, 1979, höll han ett föredrag med titeln "Does the Flap of a Butterfly's wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?" med vilket han ville säga att små förändringar på längre sikt kan bli våldsamma. En ingrediens i kaos är just detta förhållande, som populärt kallas fjärilseffekten.

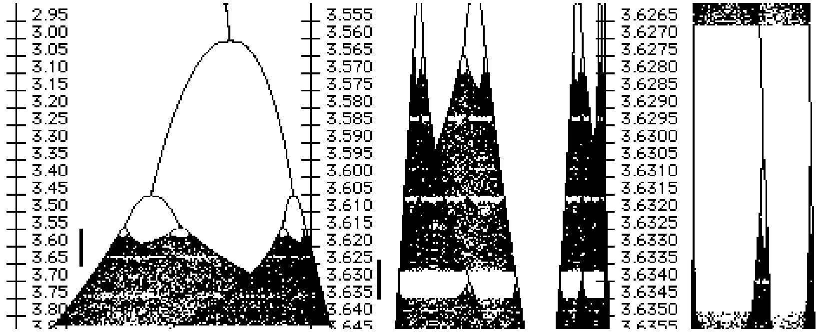
Kaos togs under åren 1988-89 flitigt upp i dagspressen. Inspirationskällan torde varit en populärvetenskaplig bok med titeln "Kaos" av journalisten James Gleick som kom på svenska i september 1988. Boken är i en mening "ovetenskaplig", men innehåller ett rikt bildspråk. Tidigare hade allmänt hållna artiklar förekommit i populärvetenskapliga tidskrifter som t ex Scientific American. Forskning kring kaos har som sagt gammal grund men intensifierades på 1980-talet.

Betrakta först ett enkelt endimensionellt exempel (som kan ges verklighetsbakgrund):

$x_{n+1} = F(x_n)$ med $F(x) = rx(1-x)$.

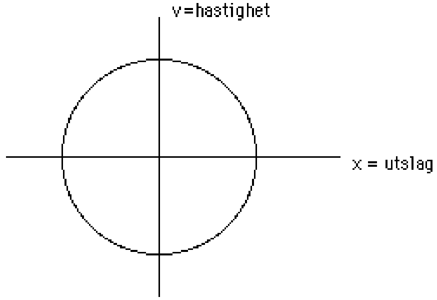
Vi antar att konstanten r uppfyller: $0 < r <= 4$. Om vi startar med ett tal x_0 i intervallet [0,1], kommer alla följande tal att ligga i samma intervall, dvs talföljden är begränsad.
Det är lätt att se att om talföljden konvergerar mot något tal x, så gäller

$$x = rx(1-x)$$
varav
$$x = (1-1/r) \text{ eller } x = 0$$
I så fall är talet *x* en **attraktor**, dvs en punkt som drar till sig andra punkter. Eftersom det första uttrycket ger ett negativt x-värde om r<1, verkar det rimligt att tro att talföljden konvergerar mot 0 om $r \le 1$ och mot (1-1/r) för $1 \le r \le 4$. Men se det är inte alls rätt. Låt oss ta till datorgrafik. Följande diagram redovisar vad som händer för ett stort antal olika r-värden. En skala för dessa finns till vänster om respektive diagram. De två högra diagrammen är "förstoringar". Startvärdet har för varje fall varit $x_0 = 0.3$ (påverkar ej diagrammens kvalitativa egenskaper). Vi har därefter genomfört ett tjugotal iterationer utan att rita något för att undvika insvängningsförloppet. Därefter har ytterligare 300 iterationer utförts varvid x_n-värdet ritats. Vi ser av vänstra diagrammet att för $1\le r \le 3$, sker konvergens mot (1-1/r) precis som teorin förutsade. För $3 < r$ växlar värdena (approximativt sett) mellan två tal. Dessa kan sägas bilda en attraktor med två punkter. Den uppifrån kommande kurvan förgrenar sig således. Med ett finare ord sägs kurvan **bifurkera**. Det finns ett enkelt teoretiskt argument för att man inte har konvergens för 3 < r: Konvergens mot x kräver nämligen att $|F'(x)| = |r(1-2x)| \le 1$. Eftersom $x = 1 - 1/r$, måste $1 \le r \le 3$. Vi kan naturligtvis räkna ut de två förgreningskurvorna, eftersom det för punkterna på dem måste gälla
$$x = F(F(x))$$
men vi nöjer oss med den information diagrammet ger.



Av diagrammet ser vi också att efter ett tag inträffar en ny bifurkation och attraktorn utgörs av fyra punkter. Kring r = 3.57 inträffar något märkligt. Det finns nu ingen attraktor bestående av ett begränsat antal punkter som drar till sig övriga punkter. Dock reduceras intervallet [0,1] något, varför den uppritade punktmängden ändå kan kallas en attraktor. Man säger att **kaos** har uppkommit och talar om en **mystisk attraktor** (eng. strange attractor). Bland de r-värden som ger upphov till kaos skymtar vi mindre vita band. Uppförstoringarna till höger (de svarta strecken intill skalan i de vänstra diagrammen visar vad som förstorats) bekräftar att så är fallet. I mittdiagrammet ser vi t ex ett band där attraktorn består av 6 punkter (vänstra delen finns förstorad i högra diagrammet). Attraktorn är fraktal i någon mening.

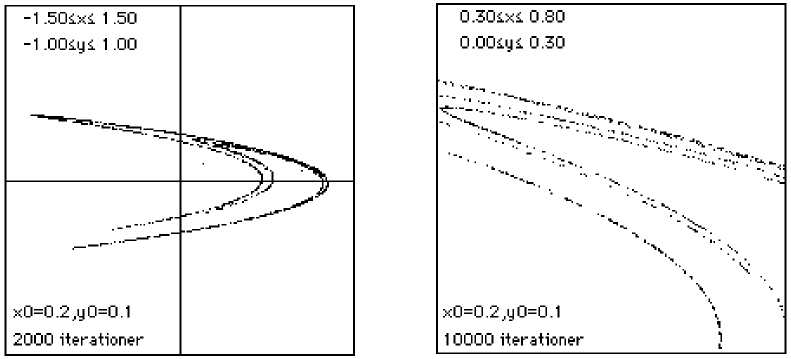
För dynamiska system använder man ofta begreppet fasdiagram. Ett sådant åskådliggör sambandet mellan vissa av tillståndsvariablerna (dvs komponenterna i vektorn). Även om det rör sig om rörelse i ett x,y-plan är vanligen hastigheten en av tillståndsvariablerna. Ett tvådimensionellt exempel utgörs av en klockpendels rörelse. Fasdiagrammet har då utseende som i figuren och visar direkt att det rör sig om ett periodiskt förlopp. Cirkeln fungerar som en attraktor, eftersom en liten stöt på pendeln snabbt bara har en kortvarig effekt. Vi vet också att små förändringar inte ger några drastiska effekter. I vissa fall deformeras cirkeln till en punkt, nämligen om pendeln ges otillräcklig puff från början.



Betrakta nu i stället ett tvådimensionellt dynamiskt system som beskrivs med Henon-transformationen

$$x_{n+1} = y_n + 1 - 1.4(x_n)^2$$
$$y_{n+1} = 0.3x_{n+1}$$

Vi startar med (0.2, 0.1) (återigen påverkas inte de kvalitativa egenskaperna; i vissa sådana här fall måste man dock välja flera olika startvärden för att få en "total" bild). Vi ritar samtliga iterationsvärden (men borde även nu hoppat över de inledande). I vänstra figuren nedan har vi gjort 2000 iterationer. I högra som är en uppförstoring (dvs med en annan skala) har vi gjort 10000. Vi ser att förstoring avslöjar "fraktala" egenskaper. Startpunkten och ett par av de första iterationsvärdena ligger som "flugsmuts"(syns nog inte i tryck). Punktmängden bildar en mystisk attraktor och kaos föreligger. Iterationsvärdena hoppar fram och tillbaka. Speciellt bör observeras att näraliggande startpunkter snart hamnar nära vitt skilda punkter på attraktorn. Exempelvis ger startpunkten (0.2,0.1) efter 500 iterationer punkten (-0.11052,-0.21854) medan startpunkten (0.20001,0.1) ger punkten (-0.90509,-0.38342).



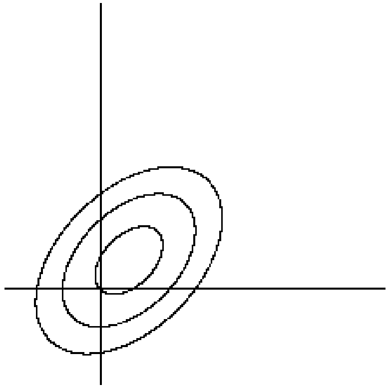
Vissa kaotiska dynamiska system kan liknas vid en bagares verksamhet. En liten klick kryddor eller dylikt sprids vid knådningen genom vikningar och töjningar till vitt skilda ställen i degen.

Vi nämnde förut att linjära iterationer inte ger något skojigt. Punkterna rusar mot oändligheten eller noll eller håller sig på en ellips. Vänstra figuren nedan visar ett exempel med

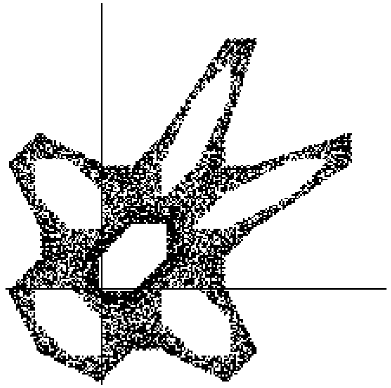
$$\begin{cases} x_{n+1} = a - by_n + cx_n \\ y_{n+1} = dx_n \end{cases}$$

där koefficienterna a, b, c, d har värden enligt figuren. Vi har startat med en punkt och de följande punkterna hamnar alla på en ellips som går igenom den första.

Byter vi ut den linjära termen cx_n mot den icke-linjära $c|x_n|$, blir vi överraskade. Högra figuren visar att en pepparkaksgubbe kan uppstå med lämpligt startvärde och lämpliga koefficienter (**anm**: origo ligger någon bildpunkt fel; sexhörningen har sina hörn i (0,0), (1,0), (2,1), (2,2), (1,2) och (0,1)).



Startpunkt: (-2.44,-3.28)
Koeff: 1.00 1.00 0.90 1.00
Antal iterationer: 1022



Startpunkt: (2.38,2.25)
Koeff: 1.00 1.00 1.00 1.00
Antal iterationer: 3453

3. NEWTONS METOD

För att bestämma ett komplext nollställe till ett n:te-gradspolynom P(z) kan man ta till Newtons välkända metod

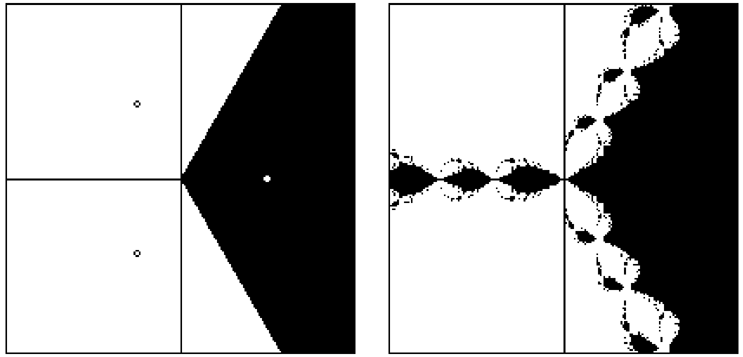
Välj ett startvärde z_0 nära det sökta nollstället

Iterera enligt $z_{n+1} = z_n - f(z_n)/f'(z_n)$

För vilka startvärden får vi konvergens mot det intressanta nollstället? Detta är som strax framgår en fråga som har ett mycket komplicerat svar även i de enklaste fall. Observera att vi kan betrakta iterationsprocessen som ett dynamiskt system. Låt oss se på fallet

$f(z) = z^3 - 1$

och anta att vi är intresserade av nollstället på reella axeln, dvs z = 1. I vänstra figuren nedan har jag ritat in samtliga tre nollställen med vita ringar. Av symmetriskäl verkar det rätt uppenbart att man skall få konvergens mot z = 1 överallt i det högra svarta området och att man för övrigt skall få konvergens mot det övre vänstra nollstället om Im $z_0 > 0$ och mot det undre om imaginärdelen är negativ. Men det går inte att bevisa och är helt fel. I högra figuren har vi med svart markerat det område som ger konvergens mot z = 1. Det svarta området gör således en inbrytning på främmande territorium liksom de två vita. Figuren är fraktal och en ritning i större skala skulle visa självlikformigheten. Figuren har åstadkommits genom att vi gått igenom bildpunkt för bildpunkt, räknat ut motsvarande z = x + iy, itererat utifrån detta värde med Newtons metod och markerat med svart om 20 iterationer gör att man kommer nära z = 1. Gränsen för antalet iterationer påverkar inte bildens kvalitativa egenskaper. Framtagningen är således datorkrävande.



$-2 \le x,y \le 2$ $\quad$ $-2 \le x,y \le 2$

4. MANDELBROTMÄNGDEN OCH JULIAMÄNGDER

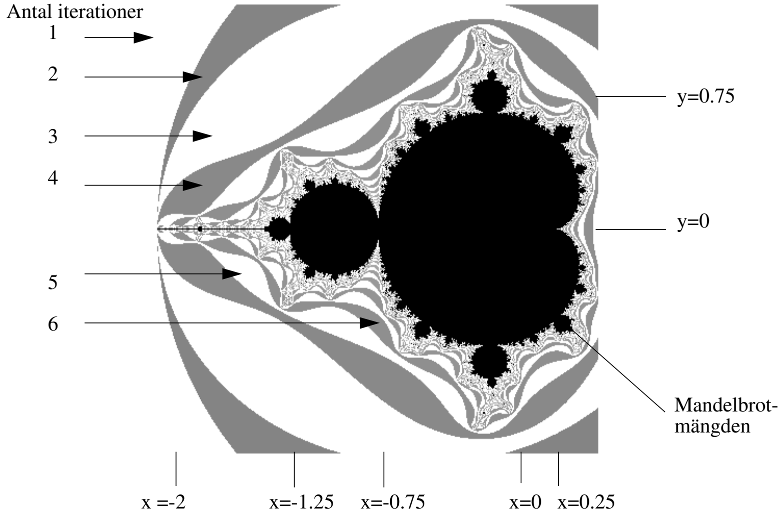
Mandelbrotmängden är omtalad i datorgrafiksammanhang och förknippas ofta med vackra färgbilder. Den utgörs av de komplexa c för vilka talföljden

$z_{n+1} = z_n^2 + c$, $z_0 = 0$

är begränsad. Exempelvis hör talet c=0 till mängden. Ett annat tal är c=-2. Det kan visas att talföljden är begränsad om och endast om

$|z_n| \le 2$ för alla n.

Mandelbrotmängden utgörs av de helsvarta punkterna i figuren nedan. Den är alltså tydligt fraktal



till sin karaktär. Den är faktiskt sammanhängande, dvs om man startar någonstans i den, kan man nå varenda annan punkt utan att "blöta ned" sig. Vi kan se iterationsformeln som ett dynamiskt system.

Som nämnts presenteras den ofta med en färgbild trots att den inte har det minsta med färg att göra. Det brukar göras så här. Om absolutbeloppet inte passerar 2 inom ett begränsat antal iterationer (t ex 1000) anses punkten c tillhöra Mandelbrotmängden och färgläggs med t ex svart, annars färgläggs motsvarande punkt c i förhållande till antalet iterationer som gick åt för att passera 2.

Uppritning av en sådan bild går till så att man först bestämmer sig för vad fönstrets kanter skall motsvara i det komplexa talplanet. Därefter går man igenom bildpunkt för bildpunkt på skärmen. För varje bildpunkt räknas motsvarande c-värde ut, varpå iterationer enligt formeln ovan utförs. Färgen i bildpunkten sätts i förhållande till det antal som åtgår för att nå gränsen 2. Det rör sig således om omfattande men mycket enkla kalkyler. Samma typ av idé kan användas för att färglägga bilder som skall visualisera olika slag av konvergensförlopp, som t ex i avsnittet om Newtons metod. I figuren har vi växlat mellan vitt och grått beroende på antal iterationer.

Fördjupar man sig i studiet av Mandelbrotmängden möter man begreppet Juliamängd. **Ifyllda Juliamängden** K_c till en funktion $f(z) = z^2 + c$ (c är givet komplext tal) utgörs av det område i komplexa talplanet som består av de tal z_0 för vilka talföljden $z_{n+1} = f(z_n)$ är begränsad. Om c=0 utgörs ifyllda Juliamängden således av punkterna innanför och på enhetscirkeln. Normalt menar man med **Juliamängden** J_c randen till den ifyllda Juliamängden. Om c=0 utgörs Juliamängden därför av punkterna på enhetscirkeln. Om c=-2 utgörs K_c och J_c av intervallet [-2,2], vilket inte är så lätt att visa. Ett djupare matematiskt resultat säger att Juliamängden är sammanhängande om och endast om talet c tillhör Mandelbrotmängden.

Gaston Julia var en fransk matematiker som - tillsammans med en kollega Pierre Fatou - presenterade en mängd teoretiska resultat kring 1920. Mandelbrot hade honom som lärare. Mandelbrot och Lorenz använde enkla datorgrafiska hjälpmedel. Julia använde troligen ingen grafik alls.

Man kan studera allmännare Juliamängder. Låt nämligen f(z) vara en godtycklig funktion av en komplex variabel z. Då gäller för vissa startvärden z_0 att talen i processen $z_{n+1} = f(z_n)$ förblir begränsade (och kanske även konvergerar). För andra är de inte begränsade. Juliamängden definieras som randen till det första området.

En ifylld Juliamängd kan ritas på samma sätt som Mandelbrotmängden. Men hur i all världen ritar man upp en Juliamängd J_c, som bara består av en (vanligen) sönderbruten kurva? Man kan knappast prova sig fram eftersom sannolikheten för att hamna på Juliamängden är "obefintlig". En idé, som beskrivs i många läroböcker, är att iterera baklänges, dvs givet z_0 bildar man

$z_{n-1} = f^{-1}(z_n)$. Det finns flera lösningar. Man kan följa en eller alla av dem. Man struntar i de inledande iterationsvärdena (insvängningsförloppet) men återger alla följande. Man får förlita sig på olika matematiska resultat. Juliamängden fungerar som en mystisk attraktor för baklängesiterationen.

Anm. 1: I början sades att om $|z_n| > 2$ för något n så rusar iterationsvärdena mot oändligheten. Låt oss visa att detta gäller om $|c| < 2$, dvs $|c| = 2 - d$ för något positivt tal d. Vi finner att

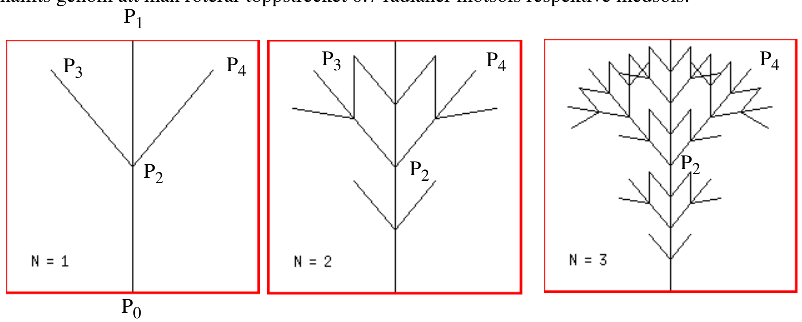
$|z_{n+1}| = |z_n^2 + c| \geq |z_n|^2 - |c| \geq 2|z_n| - (2\text{-}d) \geq |z_n| + d$, dvs vi får minst tillväxt med en konstant i varje steg, dvs beloppet växer obegränsat.
Anm. 2: Man kan visa att Mandelbrotmängden ligger inom cirkeln $|c| = 2$. Låt oss göra det. För den sakens skull väljer vi ett godtyckligt tal c med $|c|>2$. Vi får då att $z_1 = c$ och att $z_2 = c^2 + c$, varav $|z_2| = |c(c+1)| \geq |c|(|c| - 1) \geq (1+d)|c|$ för något positivt tal d. Därmed blir $|z_3| = |z_2^2 + c| \geq (1+d)^2|c|^2 - |c| \geq (1+d)^2 2|c| - |c| \geq (1+d)^2|c|$. P s s $|z_3| \geq (1+d)^4|c|$ etc, dvs z_n växer obegränsat och därmed tillhör inte vårt c Mandelbrotmängden.

5. L-SYSTEM

Det finns ett annat sätt att beskriva fraktala objekt, som efter upphovsmannen Lindenmayer kallas **L-system**. Det har framför allt använts vid syntetisk konstruktion av växter. Ett L-system innehåller framför allt två komponenter. Ett s k **axiom**, som beskriver utgångsfiguren. Det motsvarar alltså generation 0. Dessutom en eller flera **produktionsregler** som anger hur man kommer från en generation till nästa. Motsvarar generatorn, dvs generation 1. Axiomet och produktionsreglerna formuleras med hjälp av ett antal symboler, som man givit någon mening. Begreppen klarnar om vi ser på ett par exempel.

Exempel: Vår första fraktal Kochs snöflingekurva (sid 1) som ett L-system.
Axiom: F
Produktionsregel: F->F-F++F-F
Här betyder F en steglängd (längden minskar för varje generation) framåt och - och + rotation en viss given vinkel åt vänster respektive åt höger. Vi kommer från generation 0 genom att ersätta F med produktionsregelns högerled. Följande generationer når vi genom att successivt ersätta varje F enligt produktionsregeln. T ex beskrivs generation 2 av (F-F++F-F)-(F-F++F-F)++(F-F++F-F)-(F-F++F-F). Parenteserna är utsatta enbart för tydliggörande och saknar all betydelse.

Exempel: Betrakta följande fraktalfamilj. Generation 0 som är ett vertikalt streck är ej medtaget. Generatorn består av 4 streck med halva den ursprungliga längden. Det vänstra och högra har erhållits genom att man roterar toppstrecket 0.7 radianer motsols respektive medsols.



Axiom: F
Produktionsregel: F->F[-F][+F]F
Här har vi använt två nya symboler [och] med betydelsen “spara tillstånd på stack” resp “hämta tillstånd från stack”. Om man konstruerar en lagom hög generation, ritar med grönt och vänder bilden upp och ned så får man en virtuell julgran. Med rotationsvinkeln 0.45 radianer och produktionsregeln F->F[-F]F[+F]F blir resultatet snarare ett ogräs. I båda fallen hade vi klarat oss bra med den tidigare beskrivna rekursionstekniken.

6. FRAKTAL DIMENSION

Låt oss betrakta en rät linje med längden 1. För oss är det självklart att längden är oberoende av om vi använder en måttstock med måttet 1 eller 1/10. Låt 1/S (S heltal) vara måttstockens mått och N antalet delmått. Då är N=S, dvs $N\frac{1}{S} = 1$. På motsvarande sätt om vi mäter en enhetsyta gäller att delytornas area är $\left(\frac{1}{S}\right)^2$ och antalet delytor $N = S^2$, dvs $N\left(\frac{1}{S}\right)^2 = 1$.

Situationen blir helt annorlunda om vi mäter på en fraktal kurva. Betrakta t ex Koch-kurvan med startpunkt i t=0 och slutpunkt i t =1 och med högt generationsnummer. Mäter vi med en måttstock med längden 1, blir längden 1. Mäter vi med en måttstock med längden 1/3 blir längden 4/3 och med måttstocken 1/9 blir längden $(4/3)^2$. Med ovanstående båda formler som motivering brukar man definiera en **fraktal dimension** D för en fraktal som det tal som gör att $N\left(\frac{1}{S}\right)^D = 1$, där N är antalet delmått vid mätning med måttet 1/S på generatorn och där 1/S är förminskningsgraden.

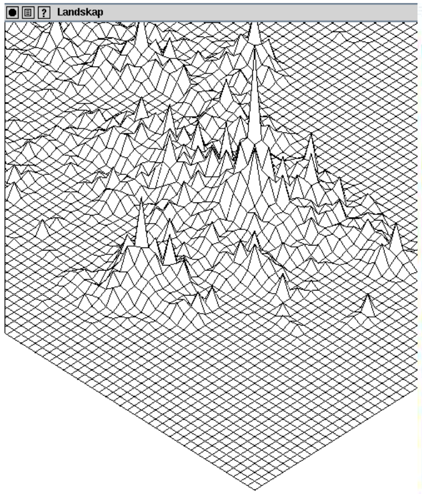
Logaritmering ger att $\log N - D\log S = 0$, dvs $D = \dfrac{\log N}{\log S}$.

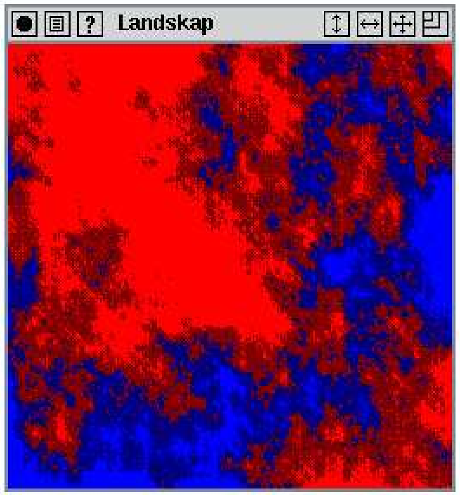
Exempel: För Kochkurvan är S=3 och N=4 och därmed $D = \dfrac{\log 4}{\log 3} \approx 1{,}26$. Den fraktala dimensionen uttrycker i detta fall att kurvan är ett mellanting mellan kurva och yta. För den andra kurvfamiljen på sid 1 är S=3 och N=5, dvs D = log 5/log 3 = 1.46. För Sierpinski-mattan S = 2, N = 3, dvs D = log 3/log 2 = 1.58 och för julgranen i avsnitt 5 gäller S=2, N=4, dvs D = log 4/log 2 = 2 (!).

Om man mäter Englands kust (det finns folk som har gjort det) blir resultatet också beroende av måttstockens längd. Det beror på att kustlinjer är fraktala till sin natur (till en viss gräns).
Enligt en uppskattare [Richard Voss] har en typisk kustlinje D=1.2, ett landskap D=2.2 och ett moln D=3.3.
Hur är det då med vanliga krökta kurvor (x=x(t), y=y(t))? Man får visserligen olika kurvlängd, men ju finare måttstocken väljs desto närmare det exakta värdet $\int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ kommer man. Längden växer inte som för fraktaler i all oändlighet.

7. BERG - SYNTETISKA SIGNALER

Med fraktalteknik kan en hel del företeelser i naturen syntetiseras. En sådan är ett landskap. På bilden nedan ser du till vänster en del av ett sådant landskap i 3D-perspektiv. Till höger finns landskapets höjder färgkodade (4 nivåer). Gjorda med delta=10 och H=0.8 (se nedan).



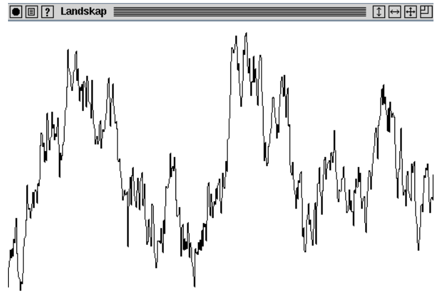


Hur tillverkar man ett sådant landskap? Dvs hur producerar man höjdvärden? Jag gör här en kort sammanfattning av beskrivningen i boken “The Science of Fractals”. Vi kommer att använda en metod kallad **mittpunktsmetoden**. Det finns andra sätt. Ken Perlin har använt sitt brus och man kan också arbeta med Fouriermetoder.
Vi behöver en funktion som ger normalfördelade slumptal med medelvärdet 0 och standardavvikelsen σ. Den kan se ut så här under UNIX (man summerar ett antal likformigt fördelade slumpvärden, vilket enligt en av statistikens centrala satser approximerar en normalfördelning). Normalfördelade slumptal är centrerade kring medelvärdet och detta i högre grad ju mindre σ är. Präktigt stora ytterlighetsvärden är möjliga men mindre sannolika.

```
float normal(float sigma) {
     float sum = 0.0;
     int i, n = 4;
     for (i=1; i<=n; i++) { sum = sum + random(); }
     return sigma*(sqrt(12.0/n)*sum/A - sqrt(3.0*n));
}
```

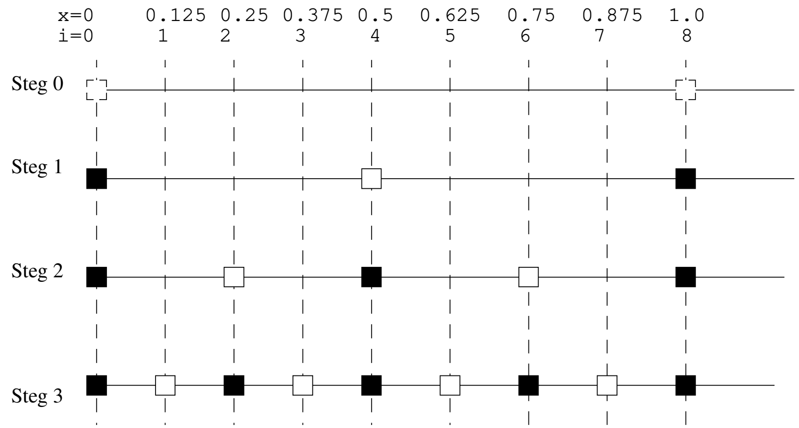
där (under UNIX) A = 2^{31}-2, dvs i C `A=pow(2.0,31)-2;`

Låt oss först se hur man åstadkommer ett 1D-berg (en bergskam). Låt N=2^P. Vi lägger höjdvärdena i en vektor med komponenter X[0], ..., X[N], dvs i C `float X[N+1]`, motsvarande höjdvärden för t ex x=0, 1.0/N, ..., 1.0. Figuren gjord med delta=10 och H=0.8.

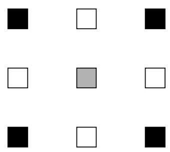


I algoritmen har vi en parameter H. Man kan visa att den fraktala dimensionen för bergskurvan är 2-H och att frekvensberoendet är $1/f^{\beta}$, där β=2H+1, dvs H=1/2 ger $1/f^2$-brus, även kallat Brownsk rörelse.
1. Slumpa fram höjd i de två ändpunkterna, dvs för X[0] och X[N] med normal(delta), där delta är en given standardavvikelse.
2. Upprepa för i = 1, 2, ..., P
    1. Beräkna ny standardavvikelse delta = delta*$(0.5)^{H/2}$
    2. Inför nya mittpunkter (oifyllda kvadrater nedan) mellan de redan beräknade (svarta kvadrater och beräkna höjden där som ett medelvärde av de två omgivande punkternas höjder.
    3. Stör alla beräknade värden med normal(delta).

I figuren illustreras processen för N=8, dvs P=3.



Så motsvarande i 2D, dvs en bergs- eller landskapsyta. Höjdvärdena placeras nu i en matris med element X[0][0], ..., X[N][N]. Den fraktala dimensionen för ytan kan visas vara 3-H.



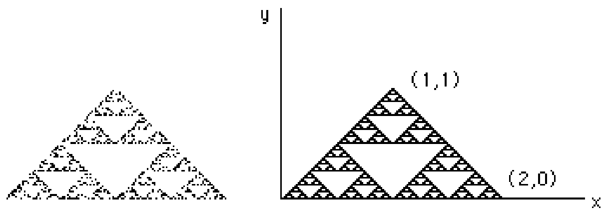
1. Slumpa fram höjd i de fyra hörnen, dvs för X[0][0], X[N][0], X[N][N], X[0][N] med normal(delta).
2. Upprepa för i = 1, 2, ..., P
    1. Beräkna ny standardavvikelse delta = delta*$(0.5)^{H/2}$
    2. Inför mittpunkt (grå i figuren) i varje kvadrat av punkter (svarta i figuren) med redan beräknade värden och beräkna höjden där som ett medelvärde av de fyra omgivande punkternas höjder.
    3. Stör alla beräknade värden med normal(delta).
    4. Beräkna ny standardavvikelse delta = delta*$(0.5)^{H/2}$
    5. Inför ytterligare mittpunkter (utan färg i figuren). Beräkna höjden i dessa som ett medelvärde av två svarta och en grå vid randen och som ett medelvärde av två svarta och två grå för övrigt.
    6. Stör alla beräknade värden med normal(delta).

8. ITERERANDE FUNKTIONSSYSTEM (IFS)

Säg att vi vill lagra bilden av ett ormbunksblad. Ett sådant är uppenbarligen rätt komplicerat och det är svårt att tro att det skulle gå att göra på ett litet minnesutrymme. Några matematiker från Georgia, USA, har försökt utnyttja att mycket av naturen är fraktal (främst i meningen självlikformig) och hävdar att med deras teknik kan bildkompressionsfaktorer på 10000:1 uppnås. Metoden beskrevs omkring 1985-86, men uppmärksammades först 1988-89 då den gjordes kommersiellt tillgänglig och sades vara sensationell. Numera inser man att marknadsföringen var överdriven och metoden är som mest en metod bland många andra kompressionsmetoder.
Kodningen av en bild är en omständlig process, som från början krävde mänsklig hantering för att bli tillfredsställande. Men även den har automatiserats. Återskapandet av bilden är däremot en rutinprocess som går snabbt med en dator. Man använder inte någon av de tidigare metoderna för fraktalgenerering utan i stället konstrueras bilden genom ett slumpmässigt val bland ett antal kontraktiva (dvs hoptryckande) linjära transformationer (skalning, translation och rotation).
Låt oss först se på ett enkelt exempel. Vi vill rita en triangelformig Sierpinski-matta. Se högra figuren nedan som visar det slutliga resultatet efter cirka 15000 iterationer. I vänstra har bara något tusental gjorts. Grundidén i IFS är att välja transformationerna så att man täcker figuren med transformerade avbildningar av den önskade. I vårt fall ser vi att vi behöver avbilda figuren på tre mindre trianglar med identiskt utseende, vilket lätt låter sig göras. Beteckna de tre transformationer med W_i, i=1,2,3. Om P är kolumnvektorn (x,y) kan vi då skriva

$$W_i P = A_i P + T_i$$

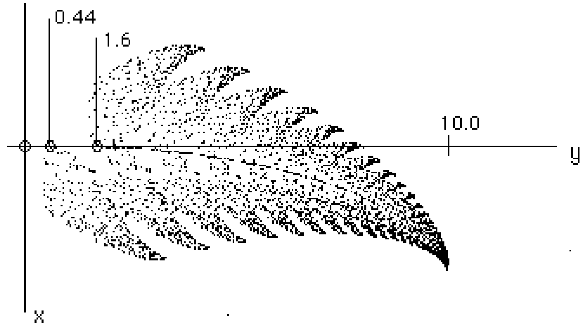
där A_i är en diagonalmatris med båda diagonalelementen lika med 0.5 (det gäller ju att halvera storleken) och T_i är kolumnmatriserna (0,0), (0.5,0.5) resp (1,0). Tar vi nu en punkt i den stora triangeln kommer den att avbildas på någon av de mindre. Genom att slumpmässigt välja mellan transformationerna kommer den önskade figuren att genereras. För att få likformig punkttäthet väljs sannolikheten p_i för respektive transformation i förhållande till ytan hos det mindre objektet. Summan av sannolikheteterna skalls vara 1, dvs här kan vi ta talen 0.33,0.33,0.34.



Metoden går praktiskt till så här.

1. Välj en godtycklig startpunkt (x,y) (inuti eller utanför objektet; i det senare fallet dras den in eftersom avbildningen är kontraktiv).
2. Upprepa ett stort antal gånger
    - 2.1. Välj slumpmässigt *i* (i förhållande till sannolikheterna p_i)
    - 2.2. Beräkna ny punkt (x,y) genom transformation med W_i av den föregående
    - 2.3. Om insvängningsförloppet passerats (dvs antalet varv > 10 t ex) markera den nya punkten.

Låt oss så till sist återgå till ormbunken. Figuren visar ett partiellt "fullgånget" blad.



Bladet kan täckas med fyra transformerade kopior av sig självt (det räcker att detta görs approximativt). Den första får vi genom att trycka ihop bladet i y-led så att toppen hamnar i y=1.6 och i x-led så att x-koordinaten blir 0. Därmed fås det yttersta av skaftet. För denna gäller således

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}16 \end{bmatrix},\ T_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De två följande kopiorna skall ge de båda understa småbladen och görs också genom kraftiga hoptryckningar och så att skaften hamnar med sina ändar på y-axeln med y=0.44 resp 1.6. De roteras också. Slutligen bildar en svagt hoptryckt och roterad kopia den övre delen av omrmbunksbladet.Data för dessa transformationer kräver mera räknearbete, men de blir

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0{,}15 & 0{,}28 \\ 0{,}26 & 0{,}24 \end{bmatrix},\ T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}44 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}26 \\ 0{,}23 & 0{,}22 \end{bmatrix},\ T_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}04 \\ -0{,}04 & 0{,}85 \end{bmatrix},\ T_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \end{bmatrix}$$

Som sannolikheter används 0.01, 0.07, 0.07 och 0.85.

9. LITTERATUR

Barnsley, Michael: Fractals Everywhere, Academic Press 1988. En av personerna bakom IFS.
Devaney, R.L.: Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Benjamin-Cummings, 1986.
Mandelbrot, Benoit: Fractals: Form, Chance, and Dimension, Freeman 1977. Det var här det startade.
Mandelbrot, Benoit: The Fractal Geometry of Nature, Freeman 1982.
Gleick, James: Kaos, Bonniers 1988
Peitgen/Richter: The Beauty of Fractals, Springer-Verlag, 1986. Framför allt en mängd utsökta bilder men också djup matematik.
Peitgen/Saupe (eds): The Science of Fractal Images, Springer-Verlag, 1988. Också en vacker bok med bilder och matematik. Många referenser.
Även om jag nu inte anger några nyare referenser, så pågår fortfarande produktion av artiklar och böcker. På kursens CD finns flera program av intresse.