Slide 1

Eine semantische Analyse struktureller Rekursion

Andreas Abel

26. Februar 1999

Slide 2

Beispiel 1: Addition von Ordinalzahlen in SML

```
datatype Nat = ...

datatype Ord = O
             | S of Ord
             | Lim of Nat -> Ord;

fun addord O        y = y
  | addord (S x')   y = S (addord x' y)
  | addord (Lim f)  y = Lim (fn z => addord (f z) y)
```

Beispiel 2: Beweis mit Pattern Matching in LEGO

Slide 3

```
$[leRefl: {T|ClTy}{t|ClTm T}{v:Val T Ts0 t}vLe v v];
[[S,T:ClTy][t:ClTm T][v:Val T Ts0 t][s:ClTm S][w:Val S Ts0 s]
 [R:Ty one][r:ClTm (UnfoldRec R)][x:ClV r]
    leRefl vUnit ==> leUnit
 || leRefl (vInl S v) ==> leInl S S (leRefl v)
 || leRefl (vInr S v) ==> leInr S S (leRefl v)
 || leRefl (vPair v w) ==> lePair (leRefl v) (leRefl w)
 || leRefl (vFold R x) ==> leFoldl R (leFoldr R (leRefl x))
];
```

Slide 4

Ziel: Zeige aus *struktureller Rekursivität* ...

$$\forall v.\ (\forall w < v.\ f(w) \Downarrow) \to f(v) \Downarrow$$

... Termination

$$\forall v.\ f(v) \Downarrow$$

Vorgehen:

1. Def. des Systems foetus: Typen $\sigma \in \mathrm{Ty}(\vec{X})$, Terme $t \in \mathrm{Tm}^\sigma[\Gamma]$
2. Def. der Auswertungsstrategie: syntakt. Werte $v \in \mathrm{Val}^\sigma$, Hüllen $\langle t; e\rangle \in \mathrm{Cl}^\sigma$, op. Sem. $\Downarrow \subseteq \mathrm{Cl}^\sigma \times \mathrm{Val}^\sigma$
3. Def. der Semantik: "gute" Werte $v \in [\![\sigma]\!]$
4. Def. der strukturellen Ordnung $<_{\sigma,\tau} \subseteq [\![\sigma]\!] \times [\![\tau]\!]$
5. Beweis der Wohlfundiertheit von $[\![\sigma]\!]$ bzgl. $<$
6. Def. der guten Terme $\mathrm{TM}^\sigma[\Gamma]$
7. Bew. der Normalisierung: $\forall t \in \mathrm{TM}.\langle t; e\rangle \Downarrow$

Typen

Strikt positive rekursive Typen.

Slide 5

$$\text{(Unit)}\quad \frac{}{1 \in \mathrm{Ty}(\emptyset)}$$

$$\text{(Var)}\quad \frac{\vec{X}, X \subset \mathrm{TyVars}}{X \in \mathrm{Ty}(\vec{X}, X)} \qquad \text{(Weak)}\quad \frac{\sigma \in \mathrm{Ty}(\vec{X}) \quad X \notin \vec{X}}{\sigma \in \mathrm{Ty}(\vec{X}, X)}$$

$$\text{(Sum)}\quad \frac{\sigma, \tau \in \mathrm{Ty}(\vec{X})}{\sigma + \tau \in \mathrm{Ty}(\vec{X})}$$

$$\text{(Arr)}\quad \frac{\sigma \in \mathrm{Ty}(\emptyset) \quad \tau \in \mathrm{Ty}(\vec{X})}{\sigma \to \tau \in \mathrm{Ty}(\vec{X})} \qquad \text{(Rec)}\quad \frac{\sigma \in \mathrm{Ty}(\vec{X}, X)}{\mathrm{Rec}\, X.\sigma \in \mathrm{Ty}(\vec{X})}$$

Notation: $\sigma(\vec{X})$

Slide 6

$$\text{(unit)}\quad \frac{}{() \in \mathrm{Tm}^1[]}$$

$$\text{(var)}\quad \frac{\Gamma \in \mathrm{Cxt} \quad x \notin \Gamma}{x \in \mathrm{Tm}^\sigma[\Gamma, x^\sigma]} \qquad \text{(weak)}\quad \frac{t \in \mathrm{Tm}^\sigma[\Gamma] \quad x \notin \Gamma}{t \in \mathrm{Tm}^\sigma[\Gamma, x^\tau]}$$

$$\text{(inl)}\quad \frac{t \in \mathrm{Tm}^\sigma[\Gamma] \quad \tau \in \mathrm{Ty}}{\mathrm{inl}(t) \in \mathrm{Tm}^{\sigma+\tau}[\Gamma]} \qquad \text{(inr)}\quad \frac{t \in \mathrm{Tm}^\tau[\Gamma] \quad \sigma \in \mathrm{Ty}}{\mathrm{inr}(t) \in \mathrm{Tm}^{\sigma+\tau}[\Gamma]}$$

$$\text{(case)}\quad \frac{t \in \mathrm{Tm}^{\sigma+\tau}[\Gamma] \quad l \in \mathrm{Tm}^\rho[\Gamma, x^\sigma] \quad r \in \mathrm{Tm}^\rho[\Gamma, y^\tau]}{\mathrm{case}(t, x^\sigma.l, y^\tau.r) \in \mathrm{Tm}^\rho[\Gamma]}$$

$$\text{(lam)}\quad \frac{t \in \mathrm{Tm}^\tau[\Gamma, x^\sigma]}{\lambda x^\sigma.t \in \mathrm{Tm}^{\sigma\to\tau}[\Gamma]} \qquad \text{(rec)}\quad \frac{t \in \mathrm{Tm}^{\sigma\to\tau}[\Gamma, g^{\sigma\to\tau}]}{\mathrm{rec}\, g^{\sigma\to\tau}.t \in \mathrm{Tm}^{\sigma\to\tau}[\Gamma]}$$

$$\text{(app)}\quad \frac{t \in \mathrm{Tm}^{\sigma\to\tau}[\Gamma] \quad s \in \mathrm{Tm}^\sigma[\Gamma]}{t\, s \in \mathrm{Tm}^\tau[\Gamma]}$$

$$\text{(fold)}\quad \frac{t \in \mathrm{Tm}^{\sigma(\mathrm{Rec}\, X.\sigma(X))}[\Gamma]}{\mathrm{fold}(t) \in \mathrm{Tm}^{\mathrm{Rec}\, X.\sigma(X)}[\Gamma]} \qquad \text{(unfold)}\quad \frac{t \in \mathrm{Tm}^{\mathrm{Rec}\, X.\sigma(X)}[\Gamma]}{\mathrm{unfold}(t) \in \mathrm{Tm}^{\sigma(\mathrm{Rec}\, X.\sigma(X))}[\Gamma]}$$

Beispiel 3: Rekursor für Nat in foetus

$$\begin{aligned}
\mathbf{Nat} &\equiv \mathrm{Rec}\, X.\, 1 + X \\[1em]
\mathbf{O} &\equiv \mathrm{fold}(\mathrm{inl}()) \\
\mathbf{S}(v) &\equiv \mathrm{fold}(\mathrm{inr}(v))
\end{aligned}$$

Slide 7

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^\sigma \equiv\ & \mathrm{rec}\, \mathrm{R}^{\sigma\to(\mathbf{Nat}\to\sigma\to\sigma)\to\mathbf{Nat}\to\sigma}.\ \lambda f_O^\sigma.\ \lambda f_S^{\mathbf{Nat}\to\sigma\to\sigma}.\ \lambda n^{\mathbf{Nat}}. \\
& \mathrm{case}(\mathrm{unfold}(n), \\
& \quad _^1.\ f_O, \\
& \quad n'^{\mathbf{Nat}}.\ f_S\, n'\ (\mathrm{R}\, f_O\, f_S\, n'))
\end{aligned}$$

Beispiel 4: addord in foetus

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ord} &\equiv \mathrm{Rec}\, X.(1 + X) + (\mathbf{Nat} \to X) \\[1em]
\mathbf{O} &\equiv \mathrm{fold}(\mathrm{inl}(\mathrm{inl}())) \\
\mathbf{S}(v) &\equiv \mathrm{fold}(\mathrm{inl}(\mathrm{inr}(v))) \\
\mathbf{Lim}(f) &\equiv \mathrm{fold}(\mathrm{inr}(f))
\end{aligned}$$

Slide 8

$$\begin{aligned}
\mathbf{addOrd} \equiv\ & \mathrm{rec}\, \mathrm{addOrd}^{\mathbf{Ord}\to\mathbf{Ord}\to\mathbf{Ord}}.\ \lambda x^{\mathbf{Ord}}.\ \lambda y^{\mathbf{Ord}}.\ \mathrm{case}(\mathrm{unfold}(x), \\
& n^{1+\mathbf{Ord}}.\ \mathrm{case}(n, \\
& \qquad _^1.\ y, \\
& \qquad x'^{\mathbf{Ord}}.\ \mathbf{S}(\mathrm{addOrd}\, x'\, y)) \\
& f^{\mathbf{Nat}\to\mathbf{Ord}}.\ \mathbf{Lim}(\lambda z^{\mathbf{Nat}}.\ \mathrm{addOrd}\ (f\, z)\ y))
\end{aligned}$$

Syntaktische Werte und Hüllen

Slide 9

$$\text{(vlam)}\quad \frac{t \in \mathrm{Tm}^{\tau}[\Gamma, x^{\sigma}] \quad e \in \mathrm{Val}(\Gamma)}{\langle \lambda x^{\sigma}.t; e\rangle \in \mathrm{Val}^{\sigma\to\tau}} \qquad \text{(vunit)}\quad \frac{}{() \in \mathrm{Val}^{1}}$$

$$\text{(vrec)}\quad \frac{t \in \mathrm{Tm}^{\sigma\to\tau}[\Gamma, g^{\sigma\to\tau}] \quad e \in \mathrm{Val}(\Gamma)}{\langle \mathrm{rec}\, g^{\sigma\to\tau}.t; e\rangle \in \mathrm{Val}^{\sigma\to\tau}}$$

$$\text{(vinl)}\quad \frac{v \in \mathrm{Val}^{\sigma} \quad \tau \in \mathrm{Ty}}{\mathrm{inl}(v) \in \mathrm{Val}^{\sigma+\tau}} \qquad \text{(vinr)}\quad \frac{v \in \mathrm{Val}^{\tau} \quad \sigma \in \mathrm{Ty}}{\mathrm{inr}(v) \in \mathrm{Val}^{\sigma+\tau}}$$

$$\text{(vfold)}\quad \frac{v \in \mathrm{Val}^{\sigma(\mathrm{Rec}\, X.\sigma(X))}}{\mathrm{fold}(v) \in \mathrm{Val}^{\mathrm{Rec}\, X.\sigma(X)}}$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Val}(\Gamma) & := & \{x_1 = v_1, \ldots, x_n = v_n : v_i \in \mathrm{Val}^{\sigma_i}\} \\
\mathrm{Cl}^{\tau} & := & \{\langle t; e\rangle : \Gamma \in \mathrm{Cxt}, t \in \mathrm{Tm}^{\tau}[\Gamma], e \in \mathrm{Val}(\Gamma)\} \\
 & \cup & \{f@u : f \in \mathrm{Val}^{\sigma\to\tau}, u \in \mathrm{Val}^{\sigma}\}
\end{array}$$

Operationale Semantik

Slide 10

Auswertungsrelation $\Downarrow^{\sigma} \subseteq \mathrm{Cl}^{\sigma} \times \mathrm{Val}^{\sigma}$.

- big step
- call-by-value
- feste Auswertungsstrategie

$$\text{(oplam)}\quad \frac{}{\langle \lambda x.t; e\rangle \Downarrow \langle \lambda x.t; e\rangle} \qquad \text{(oprec)}\quad \frac{}{\langle \mathrm{rec}\, g.t; e\rangle \Downarrow \langle \mathrm{rec}\, g.t; e\rangle}$$

$$\text{(opapp)}\quad \frac{\langle t; e\rangle \Downarrow f \quad \langle s; e\rangle \Downarrow u \quad f@u \Downarrow v}{\langle t\, s; e\rangle \Downarrow v}$$

$$\text{(opappvl)}\quad \frac{\langle t; e, x = u\rangle \Downarrow v}{\langle \lambda x.t; e\rangle@u \Downarrow v} \qquad \text{(opappvr)}\quad \frac{\langle t; e, g = \mathrm{rec}\, g.t\rangle \Downarrow f \quad f@u \Downarrow v}{\langle \mathrm{rec}\, g.t; e\rangle@u \Downarrow v}$$

Semantik

Slide 11

(Unit) $[\![1]\!] := \{()\}$

(Var) $[\![X_n]\!]_{\vec{V}} := V_n$

(Weak) $[\![\sigma(\vec{X}, Y)]\!]_{\vec{V},W} := [\![\sigma(\vec{X})]\!]_{\vec{V}}$

(Sum) $[\![(\sigma{+}\tau)(\vec{X})]\!]_{\vec{V}} := \{\mathrm{inl}(v) : v \in [\![\sigma(\vec{X})]\!]_{\vec{V}}\} \cup \{\mathrm{inr}(v) : v \in [\![\tau(\vec{X})]\!]_{\vec{V}}\}$

(Arr) $[\![\sigma \to \tau(\vec{X})]\!]_{\vec{V}} := \{f \in \mathrm{Val}^{\sigma\to\tau(\vec{\tau})} : \forall u \in [\![\sigma]\!].\ \exists v \in [\![\tau(\vec{X})]\!]_{\vec{V}}.$
$f@u \Downarrow v\}$

(Rec) $[\![\mathrm{Rec}\, Y.\sigma(\vec{X}, Y)]\!]_{\vec{V}} := \mathrm{lfp}\,\mathcal{F}$, where we define $\mathcal{F}$ as

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \quad : \quad & \mathcal{P}\left(\mathrm{Val}^{\mathrm{Rec}\, Y.\sigma(\vec{\tau}, Y)}\right) \to \mathcal{P}\left(\mathrm{Val}^{\mathrm{Rec}\, Y.\sigma(\vec{\tau}, Y)}\right) \\ & W \mapsto \mathrm{fold}\left([\![\sigma(\vec{X}, Y)]\!]_{\vec{V},W}\right) \end{aligned}$$

Fixpunkt

Sei $(\mathcal{U}, \subseteq)$ vollständiger Verband, $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ Operator. Der kleinste Fixpunkt $F = \mathrm{lfp}\,\mathcal{F}$ ist charakterisiert durch:

(ispfp) $\mathcal{F}(F) \subseteq F$

(ismpfp) $\forall A \in \mathcal{U}.\, \mathcal{F}(A) \subseteq A \to F \subseteq A$

Slide 12

Monotonie

$$\forall \sigma(X).\, A \subseteq B \to [\![\sigma(X)]\!]_A \subseteq [\![\sigma(X)]\!]_B$$

Beweis: Induktion über σ:

(Arr) Zeige: Für alle $f \in [\![\sigma \to \tau(X)]\!]_A$ und $u \in [\![\sigma]\!]$ gibt es ein $v \in [\![\tau(X)]\!]_B$ mit $f@u \Downarrow v$.

(Rec) Zeige: $[\![\mathrm{Rec}\, Z.\sigma(X, Z)]\!] \subseteq [\![\mathrm{Rec}\, Z.\sigma(X, Z)]\!]_B$.

Substitution

Slide 13

$$[\![\sigma(X)]\!]_{[\![\tau]\!]} = [\![\sigma(\tau)]\!]$$

Für $V \subseteq [\![\tau]\!]$ gilt somit

$$[\![\sigma(X)]\!]_V \subseteq [\![\sigma(\tau)]\!]$$

Beispiel 5: Alle Numerale sind gut

Slide 14

$$\mathrm{Val}^{\mathbf{Nat}} = \{(\mathrm{fold} \circ \mathrm{inr})^n(\mathrm{inl}()) : n \in \mathbb{N}\} \stackrel{!}{=} [\![\mathbf{Nat}]\!]$$

Zeige: $\mathrm{Val}^{\mathbf{Nat}}$ is kleinster Fixpunkt von

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} & : & \mathcal{P}\left(\mathrm{Val}^{\mathbf{Nat}}\right) \to \mathcal{P}\left(\mathrm{Val}^{\mathbf{Nat}}\right) \\ \mathcal{F}(W) & := & \{\mathrm{fold}(v) : v \in [\![1 + X]\!]_W\} \\ & = & \{\mathrm{fold}(\mathrm{inl}()), \mathrm{fold}(\mathrm{inr}(v)) : v \in W\} \end{array}$$

Nur zu zeigen: (ismpfp). Dazu

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}^n(\emptyset) \subseteq W \\ \text{(ii)} & \mathrm{Val}^{\mathbf{Nat}} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}^n(\emptyset) \end{array}$$

Strukturelle Ordung

Idee: Werte sind Bäume, "$<$" ist Teilbaum-Relation.

Definition von $<_{\sigma,\tau}, \leq_{\sigma,\tau} :\subseteq [\![\sigma]\!] \times [\![\tau]\!]$

$$\text{(lerefl)} \quad \frac{}{v \leq_{\sigma,\sigma} v} \qquad \text{(lelt)} \quad \frac{w <_{\sigma,\tau} v}{w \leq_{\sigma,\tau} v}$$

Slide 15

$$\text{(ltinl)} \quad \frac{w \leq_{\rho,\sigma} v}{w <_{\rho,\sigma+\tau} \mathrm{inl}(v)} \qquad \text{(ltinr)} \quad \frac{w \leq_{\rho,\tau} v}{w <_{\rho,\sigma+\tau} \mathrm{inr}(v)}$$

$$\text{(ltarr)} \quad \frac{\exists v \in \mathrm{CoDom}(f). w <_{\rho,\tau} v}{w <_{\rho,\sigma\to\tau} f} \qquad \text{(learr)} \quad \frac{\exists v \in \mathrm{CoDom}(f). w \leq_{\rho,\tau} v}{w \leq_{\rho,\sigma\to\tau} f}$$

$$\text{(ltfold)} \quad \frac{w <_{\sigma,\tau(\mathrm{Rec}\, X.\tau(X))} v}{w <_{\sigma,\mathrm{Rec}\, X.\tau(X)} \mathrm{fold}(v)} \qquad \text{(lefold)} \quad \frac{w \leq_{\sigma,\tau(\mathrm{Rec}\, X.\tau(X))} v}{w \leq_{\sigma,\mathrm{Rec}\, X.\tau(X)} \mathrm{fold}(v)}$$

Wohlfundiertheit

Def. der erreichbaren Teilmenge $\mathrm{Acc}^{\sigma} \subseteq [\![\sigma]\!]$:

$$\text{(acc)} \qquad \frac{\forall \tau, [\![\tau]\!] \ni w < v.\, w \in \mathrm{Acc}^{\tau}}{v \in \mathrm{Acc}^{\tau}}$$

Alle semantischen Werte sind erreichbar.

$$\forall \sigma(\vec{X}), \vec{\rho}.\ [\![\sigma(\vec{X})]\!]_{\mathrm{Acc}^{\vec{\rho}}} \subseteq \mathrm{Acc}^{\sigma(\vec{\rho})}$$

Slide 16 Beweis durch Induktion über den Aufbau des Typs σ.

(Arr) Sei $f \in [\![\sigma \to \tau(\vec{X})]\!]_{\mathrm{Acc}^{\vec{\rho}}}$. Monotonie liefert $f \in [\![\sigma \to \tau(\vec{\rho})]\!]$, nach Induktionsvoraussetzung $\mathrm{CoDom}(f) \subseteq [\![\tau(\vec{X})]\!]_{\mathrm{Acc}^{\vec{\rho}}} \subseteq \mathrm{Acc}^{\tau(\vec{\rho})}$ folgt mit einem Hilfslemma $f \in \mathrm{Acc}^{\sigma\to\tau(\vec{\rho})}$.

(Rec) Zu zeigen $[\![\mathrm{Rec}\, \sigma(\vec{X}, Y)]\!]_{\mathrm{Acc}^{\vec{\rho}}} \subseteq \mathrm{Acc}^{\mathrm{Rec}\, Y.\sigma(\vec{\rho},Y)}$. Wir nutzen die Ind.vor. $[\![\sigma(\vec{X}, Y)]\!]_{\mathrm{Acc}^{\vec{\rho}},\mathrm{Acc}^{\mathrm{Rec}\, Y.\sigma(\vec{\rho},Y)}} \subseteq \mathrm{Acc}^{\sigma(\vec{\rho},\mathrm{Rec}\, Y.\sigma(\vec{\rho},Y))}$ und die Fixpunkteigenschaften.

Strukturell rekursive Terme

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{SR}^{\sigma\to\tau}[\Gamma] & := & \{\mathrm{rec}\, g.t \in \mathrm{Tm}^{\sigma\to\tau}[\Gamma] : \forall e \in [\![\Gamma]\!], v \in [\![\sigma]\!]. \\ & & (\forall [\![\sigma]\!] \ni w < v. \langle \mathrm{rec}\, g.t; e\rangle @ w \Downarrow) \to \langle \mathrm{rec}\, g.t; e\rangle @ v \Downarrow\}\end{array}$$

Slide 17

Induktionsschema für wohlfundierte Mengen:

$$(\mathrm{accind}) \qquad \frac{\forall v \in [\![\sigma]\!].\, (\forall [\![\sigma]\!] \ni w < v.\, P(w)) \to P(v)}{\forall v \in \mathrm{Acc}^{\sigma}.\, P(v)}$$

Damit sind strukturell rekursive Terme gut:

$$t \in \mathrm{SR}^{\sigma\to\tau}[\Gamma],\ e \in [\![\Gamma]\!] \to \langle t; e\rangle \in [\![\sigma \to \tau]\!]$$

Beispiel 6: addord ist strukturell rekursiv

Rekursive Aufrufe:

Slide 18

$$\ldots \mathbf{S}(\mathrm{addOrd}\, x'\, y)\ldots \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{v' \le v'}\,\mathrm{lerefl}}{v' < \mathrm{inr}(v')}\,\mathrm{ltinr}}{v' \le \mathrm{inr}(v')}\,\mathrm{lelt}}{v' < \mathrm{inl}(\mathrm{inr}(v'))}\,\mathrm{ltinl}}{v' < \mathbf{S}(v') \equiv \mathrm{fold}(\mathrm{inl}(\mathrm{inr}(v')))}\,\mathrm{ltfold}$$

$$\ldots \mathbf{Lim}(\lambda z^{\mathbf{Nat}}.\, \mathrm{addOrd}\ (f\, z)\ y)\ldots \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{w \le w}\,\mathrm{lerefl}}{\exists v' \in \mathrm{CoDom}(f).\, w \le v'}\,\exists\mathcal{I}}{w \le f}\,\mathrm{learr}}{w < \mathrm{inr}(f)}\,\mathrm{ltinr}}{w < \mathbf{Lim}(f) \equiv \mathrm{fold}(\mathrm{inr}(f))}\,\mathrm{ltfold}$$

Normalisierung

Definiere gute Terme $\mathrm{TM}^\sigma[\Gamma] \subset \mathrm{Tm}^\sigma[\Gamma]$ induktiv wie Tm mit der Ausnahme

$$\text{(REC)} \qquad \frac{t \in \mathrm{TM}^{\sigma\to\tau}[\Gamma, g^{\sigma\to\tau}] \quad \mathrm{rec}\, g.t \in \mathrm{SR}^{\sigma\to\tau}[\Gamma]}{\mathrm{rec}\, g.t \in \mathrm{TM}^{\sigma\to\tau}[\Gamma]}$$

Slide 19

Zeige Normalisierung

$$\forall \sigma, \Gamma, t \in \mathrm{TM}^\sigma[\Gamma], e \in [\![\Gamma]\!].\, \langle t; e\rangle \Downarrow$$

durch Induktion über t mit Hilfe der operationalen Semantik.

Erweiterungsmöglichkeiten und offene Fragen

Slide 20

- positive Typen (?)
- polymorphe Typen
- abhängige Typen
- Coinduktive Typen