

FÖRELÄSNING 10

Ledningar med förluster

Förlustfria ledningar

Rum-tid-diagram

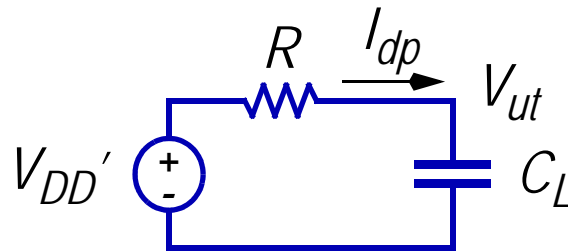
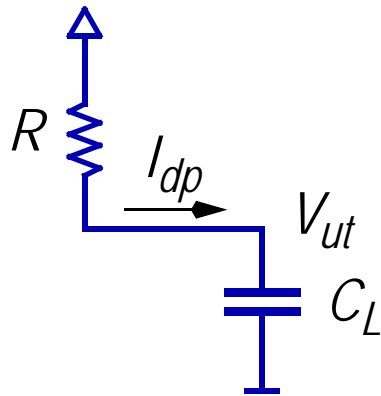
Bergerondiagram

Appendix: Härledning av Bergerondiagrammet

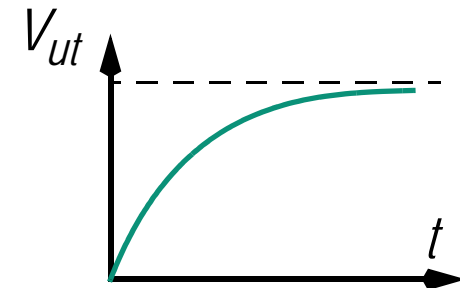
Ledningar med förluster

RC-MODELLEN FÖR TRANSISTOR

- ◆ På Föreläsning 6 studerade vi uppladdningen av en inverterares utgång. Bland annat studerade vi bilden nedan ...



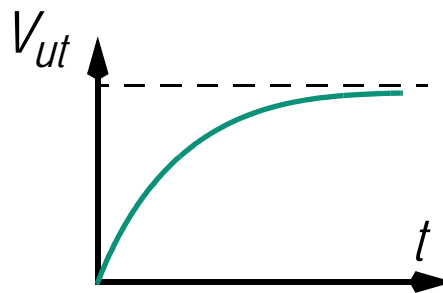
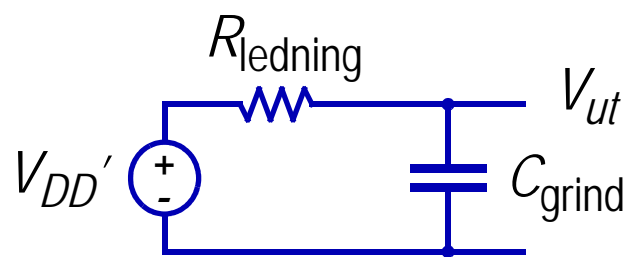
$$V_{ut}(t) = V_{DD} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC_L}} \right)$$



- ◆ I Fö 6 använder vi en resistans som modell för PMOS-transistorn; vi använder modellen som approximation av den komplicerade transistorn.

EN “LITE LÄNGRE, MEN SMAL” LEDNING

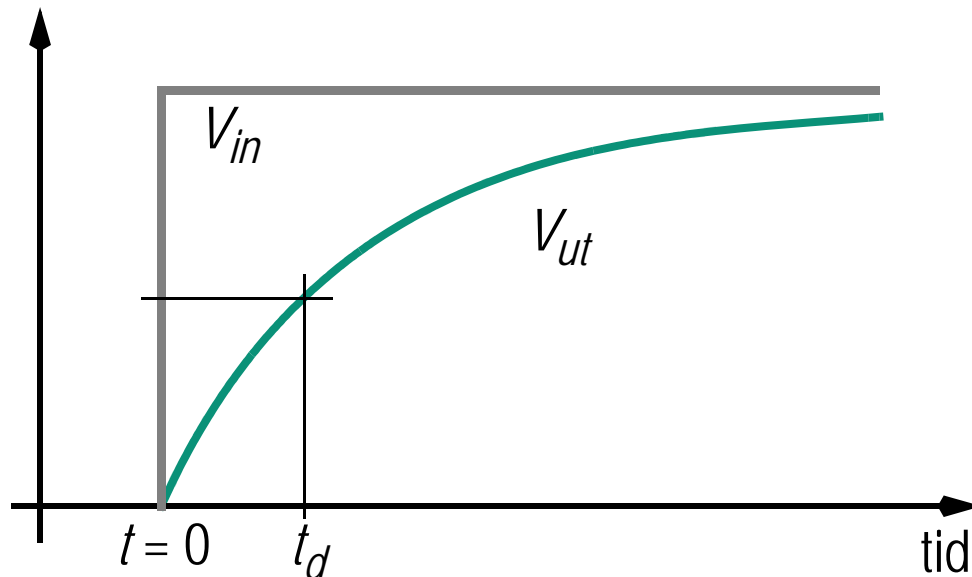
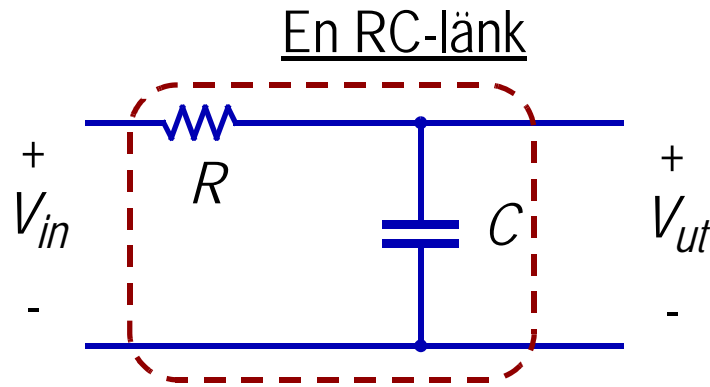
- ◆ När vi har att göra med en lite längre ledning med liten tvärsnittsyta, är det ofta rimligt att modellera denna med en resistans i serie med en avslutande kapacitiv belastning från en grind.
- ◆ Om vi anbringar en ideal spänningskälla direkt på denna ledning så har vi en situation som liknar inverterarens uppladdning:



$$V_{ut}(t) = V_{DD} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

- ◆ *Skillnaden mellan fallen:*
I en ledning är R verkligen linjär. Men för en transistor är R en approximation.
- ◆ *Alltså:* För en ledning kan vi lita på siffrorna vi får från RC-tidskonstanten.

FÖRDRÖJNING I EN LEDNING MED PUNKTFORMIGT RC



1. Vi antar att V_{in} är ett steg, 0 till V_{DD} .
2. Fördröjningen mäts vid 50% av V_{DD} .

Vi får alltså $\frac{V_{DD}}{2} = V_{DD} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_d}{RC}}\right)$,

vilket leder till

$$t_d = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot RC = 0,69 \cdot RC.$$

PUNKTFORMIG VS DISTRIBUTUERAD MODELL

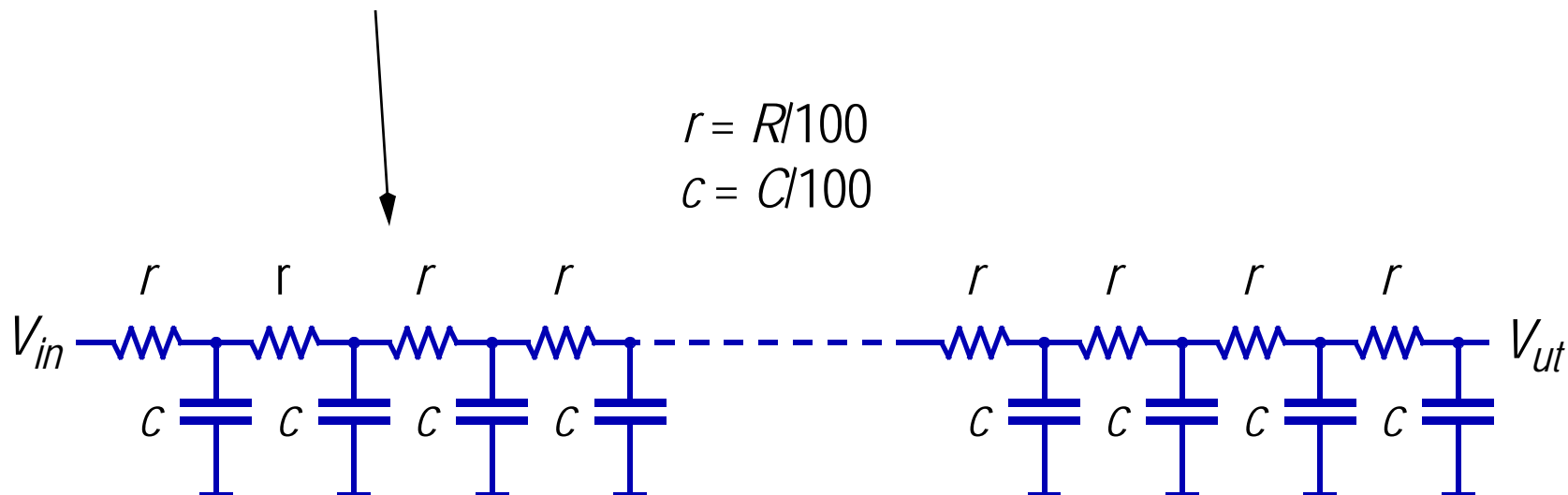
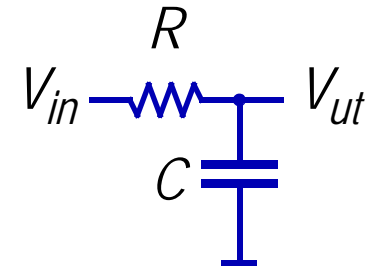
Vi ska nu jämföra två modeller:

den punktformiga modellen

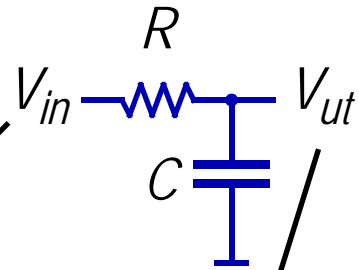
mot

den distribuerade RC-modellen

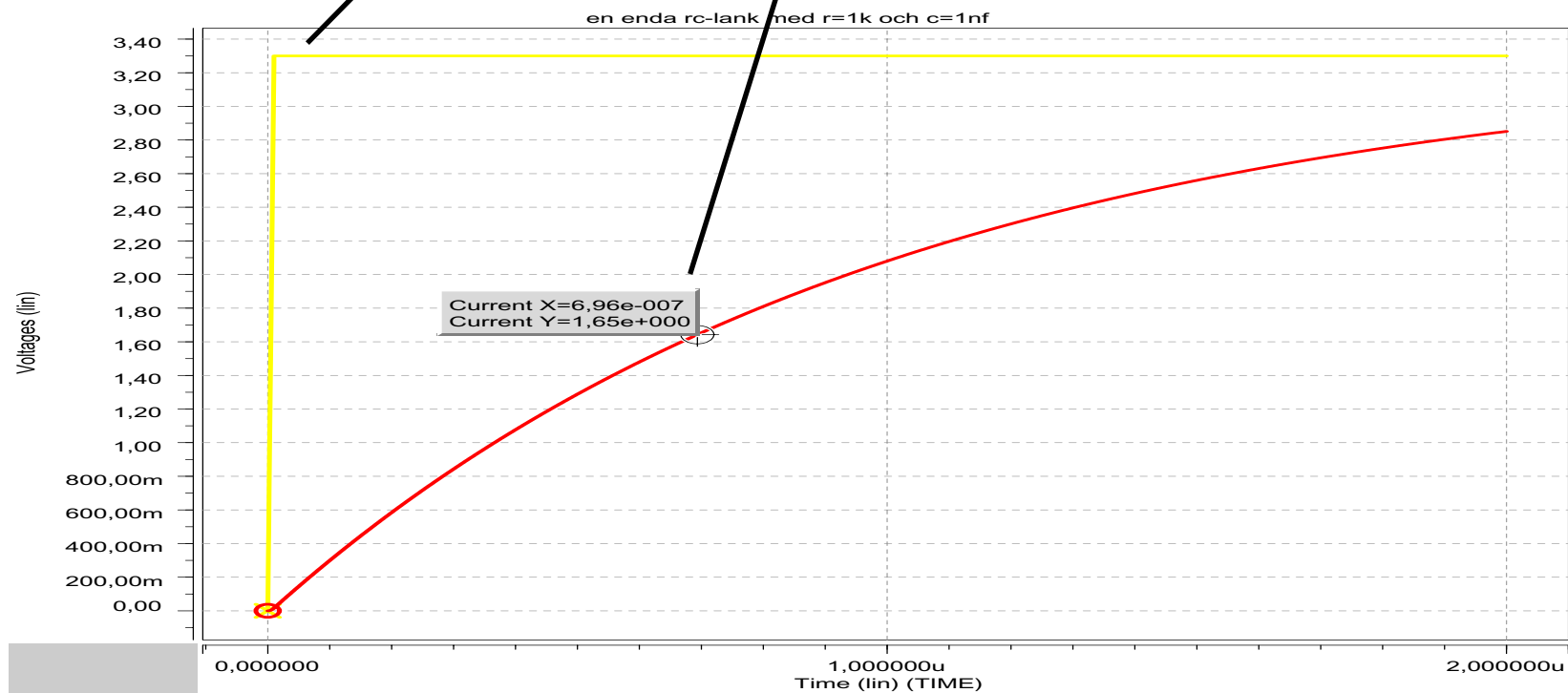
(i form av en 100-länkars approximation).



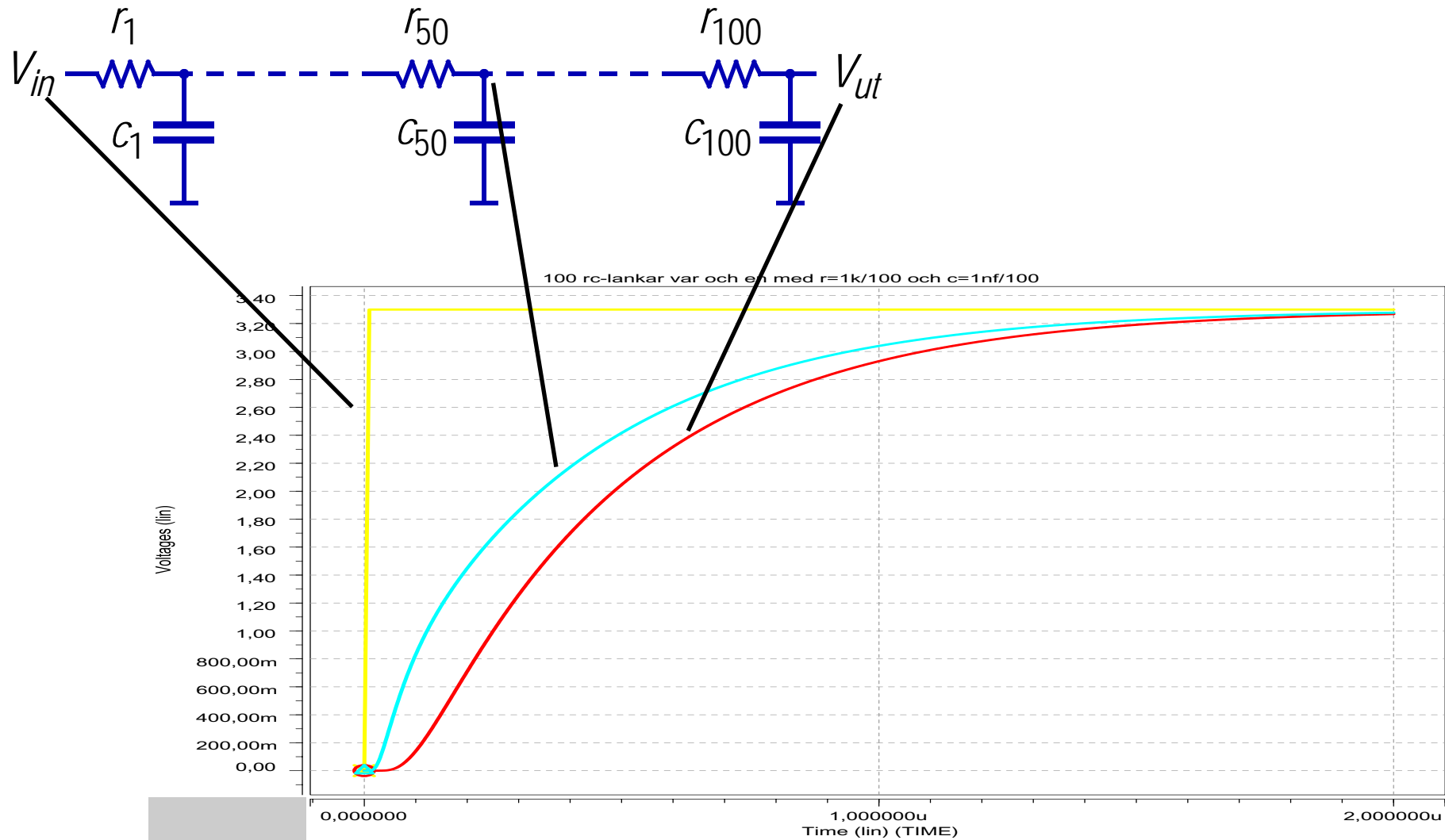
DEN PUNKTFORMIGA RC-MODELLEN - RC-LÄNKEN



$$V_{ut}(t) = V_{DD} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

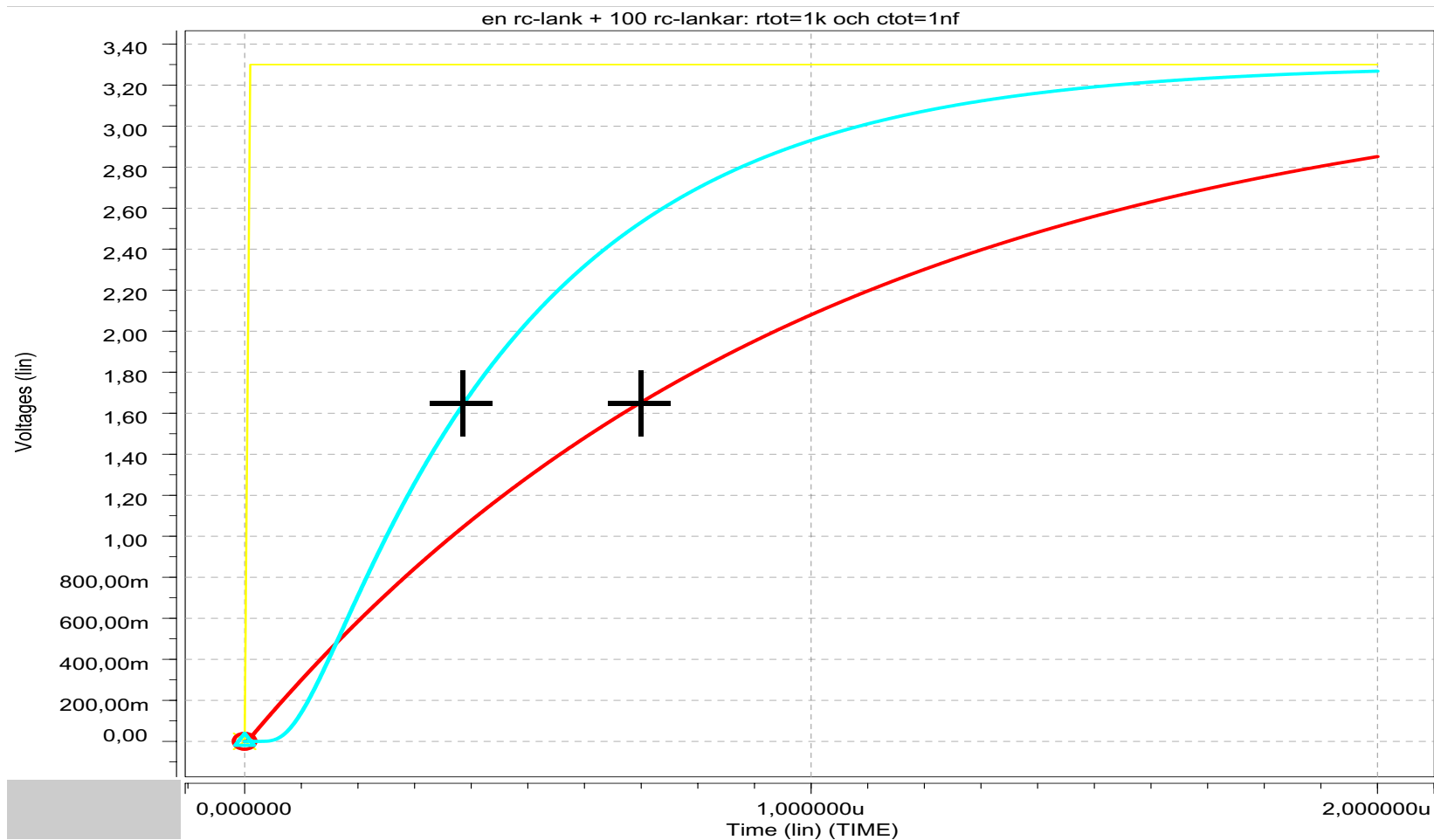


EN 100-LÄNKARS “DISTRIBUERAD” RC-MODELL



JÄMFÖRELSE AV RC-FÖRDRÖJNINGARNA

Den punktformiga modellens V_{ut} är röd, den "distribuerades" V_{ut} turkos



DEN DISTRIBUTUERADE RC-LEDNINGEN 1(2)

- ◆ Vi har telegrafekvationerna från förra föreläsningen:

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = -\left(R + L \frac{\partial}{\partial t}\right) i(x, t) \text{ och } \frac{\partial}{\partial x} i(x, t) = -\left(G + C \frac{\partial}{\partial t}\right) v(x, t).$$

- ◆ För en ledning med RC-egenskaper har vi $L = 0$ och $G = 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) = -R \frac{\partial}{\partial x} i(x, t) = -R \left[-C \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) \right] = RC \frac{\partial}{\partial t} v(x, t).$$

- ◆ Om man antar en oändligt lång ledning blir lösningen på ekvationen:

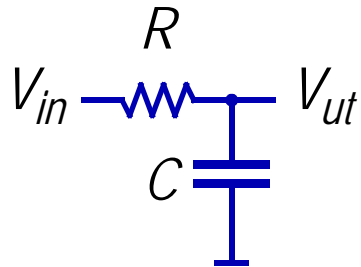
$$v(x, t) = \operatorname{Erfc}\left(\frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{RC}{t}}\right),$$

där Erfc kallas den komplementära errorfunktionen → kolla formelsamling!

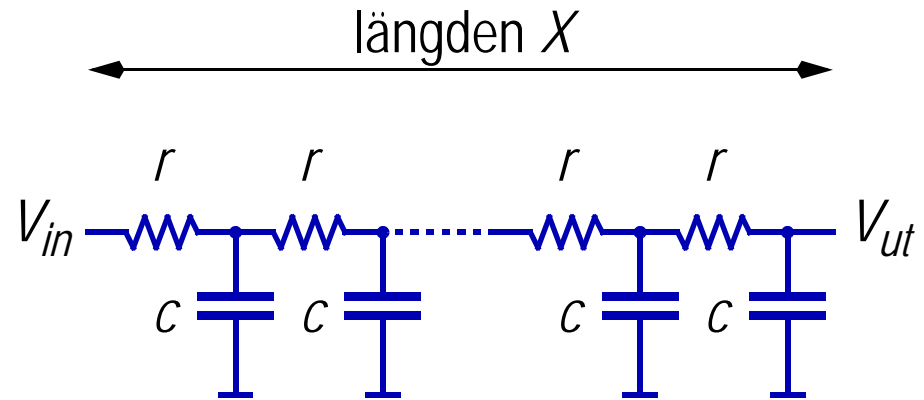
DEN DISTRIBUTUERADE RC-LEDNINGEN 2(2)

- ◆ Notera att distribuerade ledningar med förluster i allmänhet är knepigare att analysera än de förlustfria ledningarna.
- ◆ RC-modellen är emellertid mycket viktig, eftersom den representerar de flesta IC-ledningarna med begränsad tvärsnittsytta, alltifrån
 - korta ledningar (då genom den punktformiga modellen),
 - till
 - långa ledningar (då genom den distribuerade modellen).

SKILLNADEN I FÖRDRÖJNINGEN HOS RC-MODELLER



- ◆ För en punktformig modell gäller att fördröjningen är $t_d = 0,69 \cdot RC$.

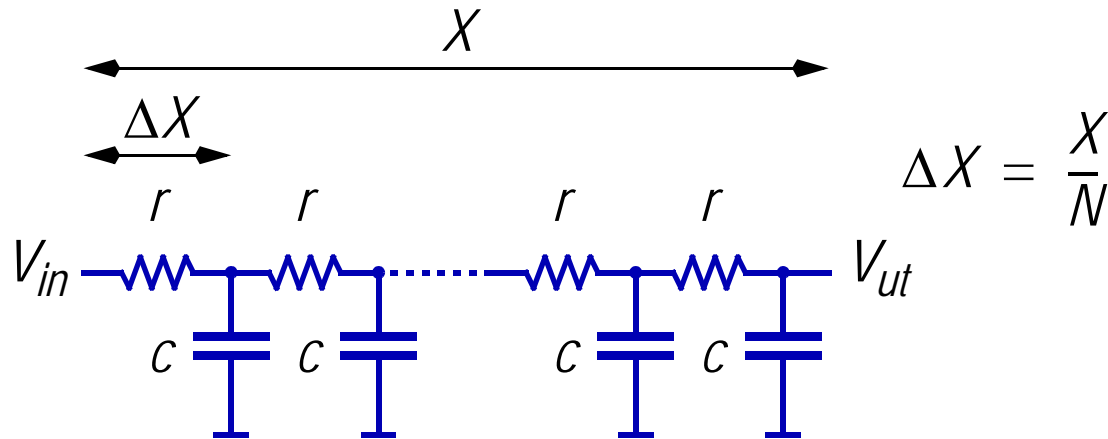


- ◆ För en distribuerad modell gäller

$$t_d = 0,69 \cdot \frac{rc}{2} \cdot X^2,$$

d.v.s. fördröjningen är hälften mot vad den är i den punktformiga modellen.
Varför?

DEN DISTRIBUTUERADE RC-LEDNINGEN



Varför är

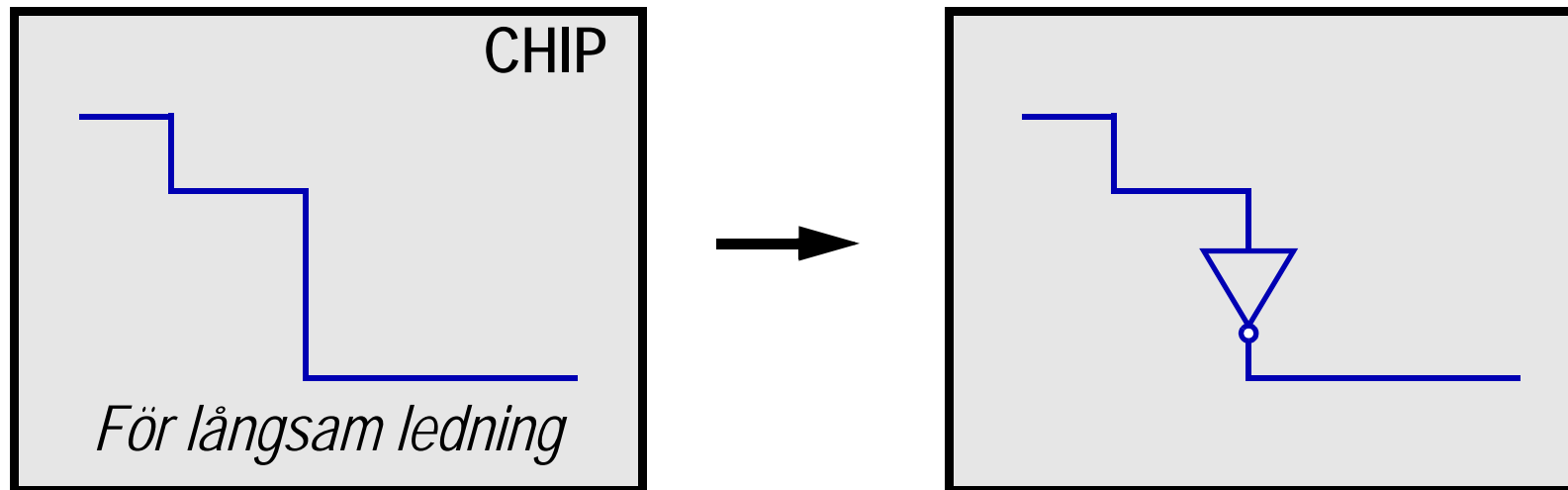
$$t_d = 0,69 \cdot \frac{rc}{2} \cdot X^2 ?$$

- ◆ Använd en aritmetisk summa för att räkna samma alla individuella länkar:

$$t_d = 0,69 \cdot (\Delta X)^2 (rc + (2r)c + \dots + (Nr)c) = (\Delta X)^2 rc \frac{N(N+1)}{2}$$

$$t_d = 0,69 \cdot \left(\frac{X}{N}\right)^2 rc \frac{N(N+1)}{2} = X^2 \cdot \frac{rc}{2} \cdot \frac{N(N+1)}{N^2} \rightarrow \frac{rc}{2} \cdot X^2 \text{ för stora } N.$$

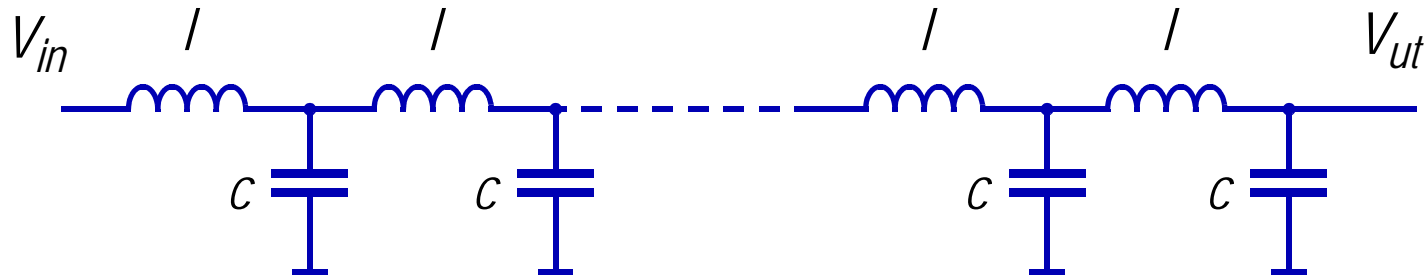
DET STORA PROBLEMET MED RC-LEDNINGAR



- ◆ $t_d = 0,69 \cdot \frac{rC}{2} \cdot \text{längd}^2$, d.v.s. fördröjningen beror av ledningslängden i kvadrat!
- ◆ Repeater-insertion (Fö 9 och SPICE-övning 9) bryter det kvadratiska beroendet, men kostar i form av fördröjning i repeatern.

Förlustfria ledningar

DEN DISTRIBUTUERADE LC-LEDNINGEN



- ◆ I modellen för LC-ledningen dominerar induktansen stort över resistansen: Från den generella ledningsmodellen har vi alltså behållit L och C , men satt $R = 0$ och $G = 0$ (d.v.s. resistansen mellan signal och jord $\rightarrow \infty$), vilket är normala antaganden för t.ex. kretskortsledningar, men också för ledningar i de övre metallagren av ett chips.
- ◆ Vi kommer enbart studera distribuerade LC-ledningsmodeller. Punktformiga LC-modeller förekommer nästan aldrig.

TELEGRAFEKVATIONERNA FÖR LC-LEDNINGEN

- ◆ Vi har telegrafekvationerna:

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = -\left(R + L \frac{\partial}{\partial t}\right) i(x, t) \text{ och } \frac{\partial}{\partial x} i(x, t) = -\left(G + C \frac{\partial}{\partial t}\right) v(x, t).$$

- ◆ Det var ju på 1800-talet som man använde telegrafekvationen för första gången. Nu, som då, har vi för vår LC-ledning $R = 0$ och $G = 0$.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-L \frac{\partial}{\partial t} i(x, t) \right) = -L \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} i(x, t) \right) = L \frac{\partial}{\partial t} \left(C \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x, t).$$

HASTIGHETEN I EN LC-LEDNING 1(2)

- ◆ Lösningen till föregående ekvation är en funktion som innehåller variabeln $t - x/v_p$,

där $v_p = \frac{1}{\sqrt{l \cdot c}}$ är fashastigheten på signalen

där den åker genom ledningen.

- Här motsvarar l och c det totala L och C delat med ledningslängden.

- ◆ Exempelvis $A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v_p}\right)\right)$ är en lösning:

en våg som rusar fram mot ökande x .

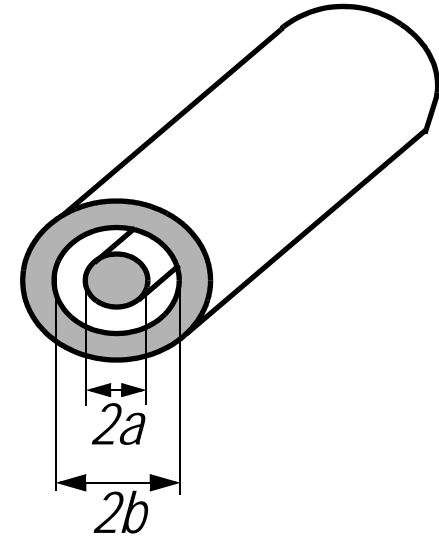
HASTIGHETEN I EN LC-LEDNING 2(2)

- ◆ Vi är sedan länge bekanta med $S = V \cdot T$ (sträckan vi reser ges av hastighet och tid).
- ◆ $v_p = \frac{X}{\sqrt{LC}}$ betyder att propageringstiden från den ena sidan av ledningen till den andra kan skrivas $t_d = \sqrt{LC}$!

VI DUBBELKOLLAR HASTIGHETEN I LC-LEDNINGEN

- ◆ Under Föreläsning 9 såg vi att maxhastigheten skrivs som $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$. Genom att använda $v = \frac{1}{\sqrt{lc}}$ kan vi kolla om detta stämmer!

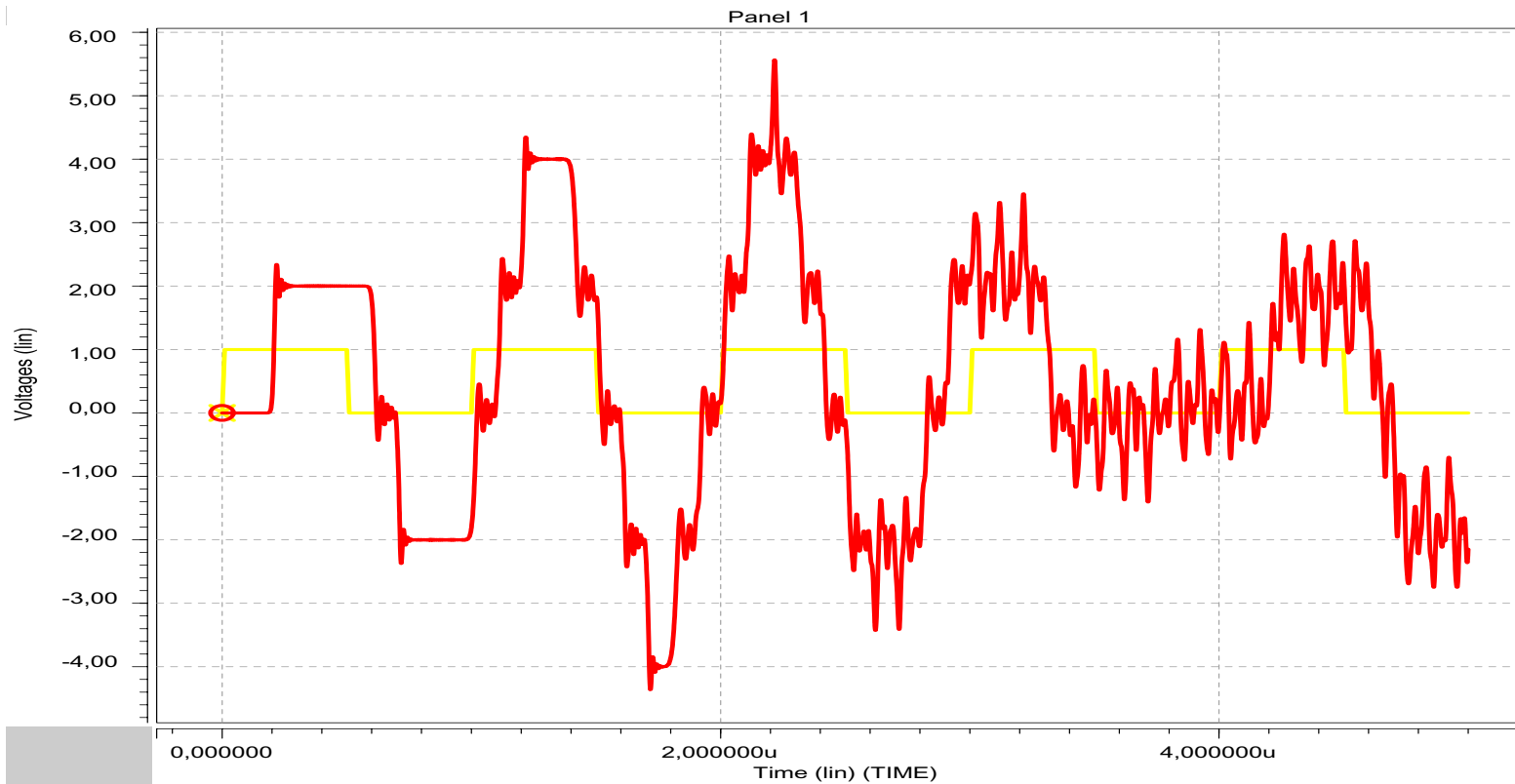
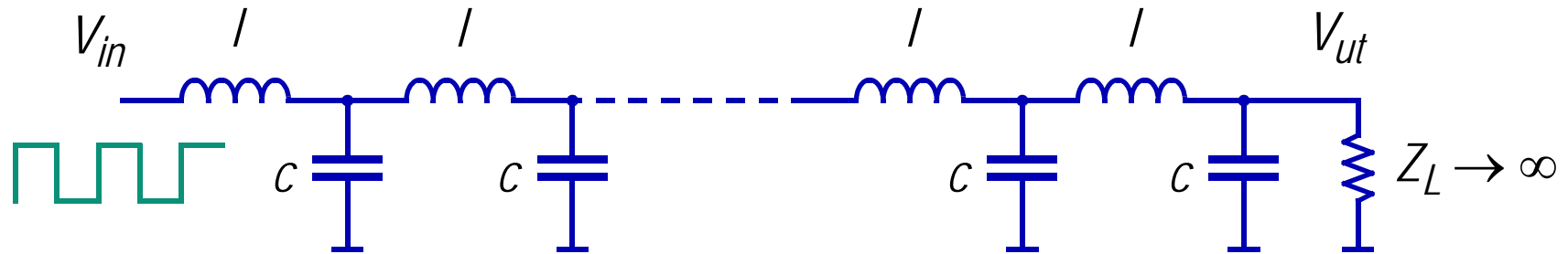
- ◆ Formelsamling (koax): $l = \frac{\mu_r \mu_0 \cdot \ln b/a}{2\pi}$, $c = \frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0}{\ln b/a}$!



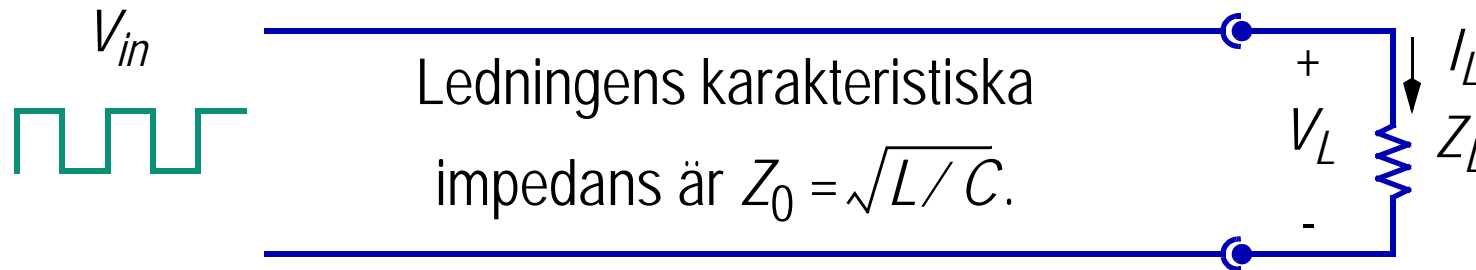
- ◆ $v_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_r \mu_0 \cdot \ln b/a}{2\pi} \cdot \frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0}{\ln b/a}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$, ty $\mu_r \approx 1$ för metaller.

- ◆ Ja, maxhastigheten verkar nås. Men förutsättningen är att $R = 0$.

SIMULERING AV 100 LC-LÄNKAR



REFLEKTION VID TERMINERING 1(2)



- ◆ Precis innan signalen nått fram till termineringen (belastningen L) råder tiden t^- , medan precis efter den reflekterats råder tiden t^+ . Nu gäller följande:

1. $V_L(t) = V_L(t^-) + V_L(t^+)$, då inkommande och reflekterad våg adderas.

2. $I_L(t) = \frac{V_L(t^-)}{Z_0} - \frac{V_L(t^+)}{Z_0}$, eftersom strömmen i belastningen bytt riktning efter reflektionen och är på väg mot vänster.

REFLEKTION VID TERMINERING 2(2)

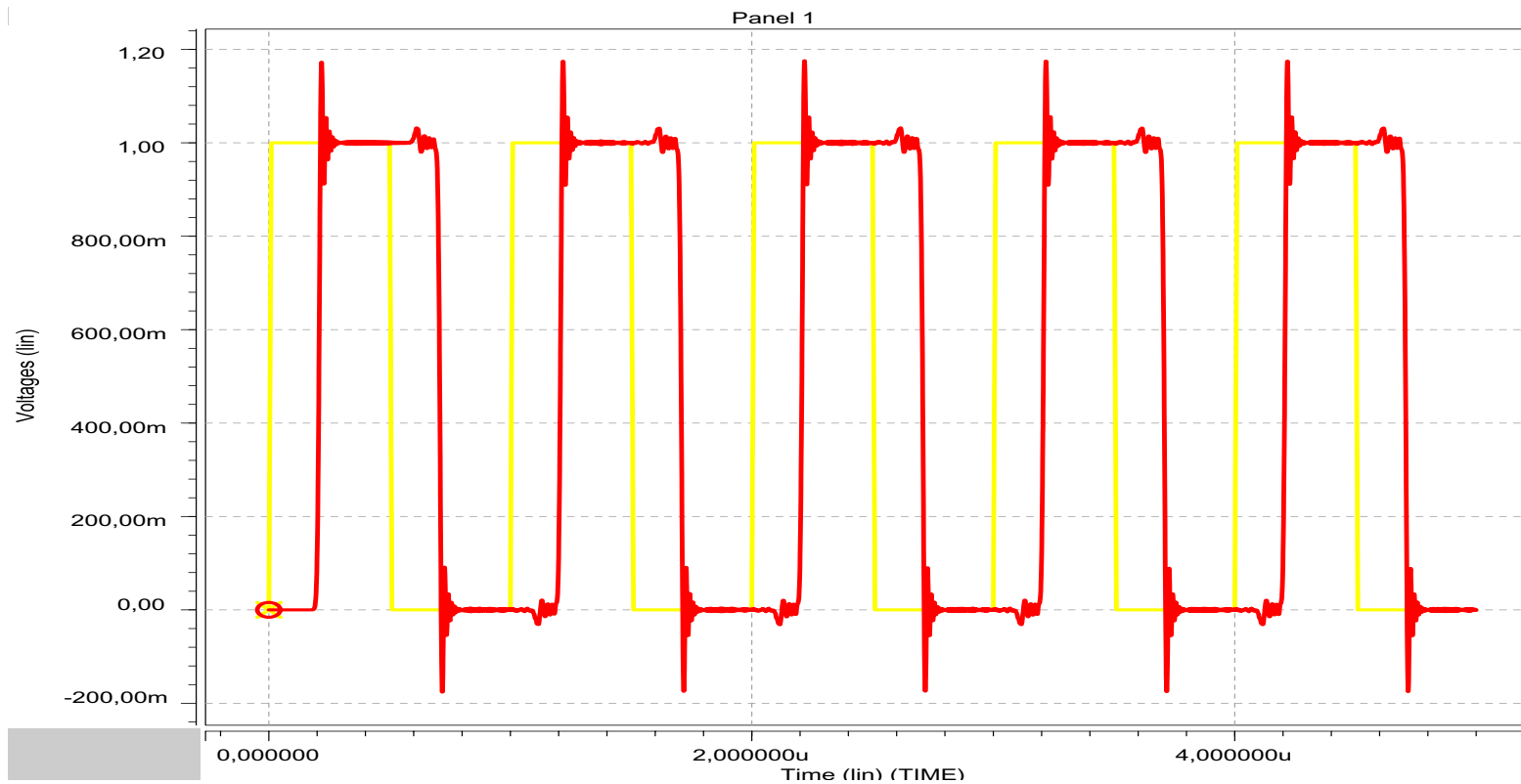
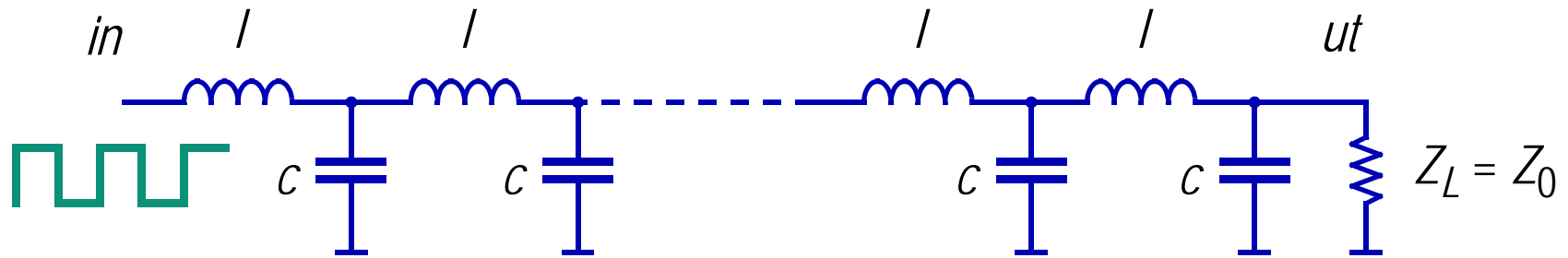
- ◆ Vi har ett uppenbart randvillkor i detta fall, nämligen att strömmen genom belastningen måste relateras till belastningsimpedansen Z_L .

Vi kan skriva strömmen genom belastningen Z_L som $I_L(t) = \frac{V_L(t)}{Z_L}$.

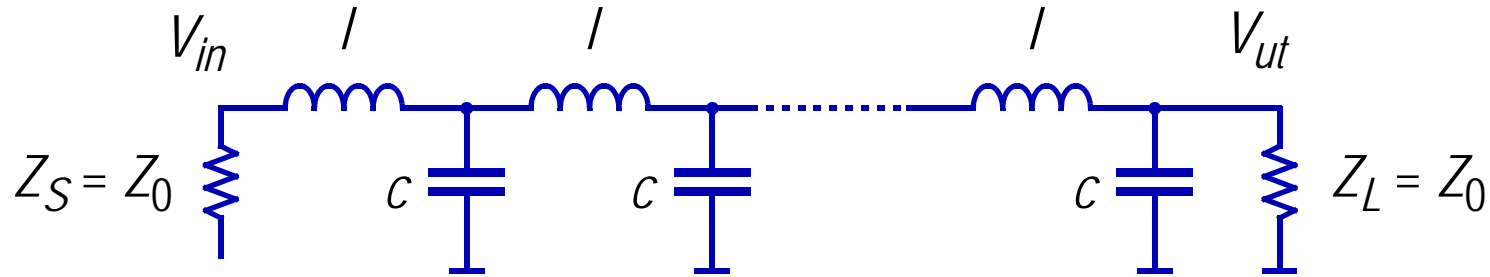
- ◆ Nu får vi $\frac{V_L(\bar{t})}{Z_0} - \frac{V_L(t^+)}{Z_0} = \frac{V_L(\bar{t}) + V_L(t^+)}{Z_L}$, vilket ger oss möjlighet att relatera inkommande spänning till reflekterad spänning.

- ◆ $\Gamma_L = \frac{V_L(t^+)}{V_L(\bar{t})} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$ (reflektionskoefficienten) talar om hur stor del av inkommande spänning som reflekteras: Testa $Z_L = Z_0$ — vad blir Γ_L ?

OM Z_L SÄTTTS TILL KARAKTERISTISKA IMPEDANSEN



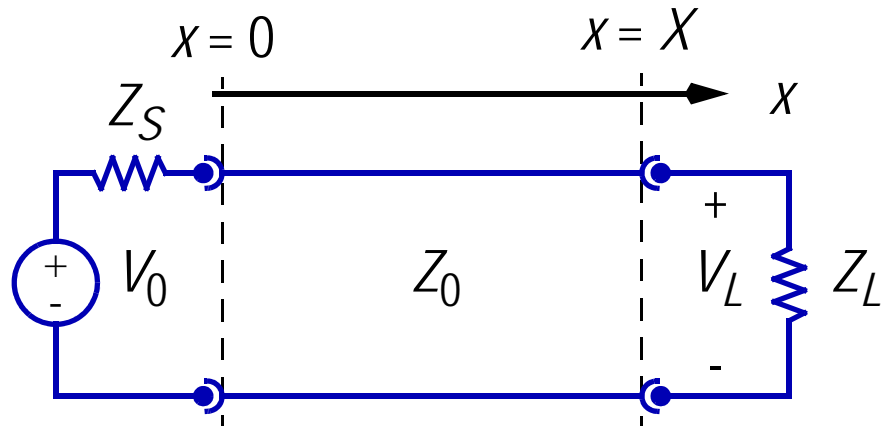
IMPEDANSANPASSNING I BÅDA LEDNINGSÄNDARNA



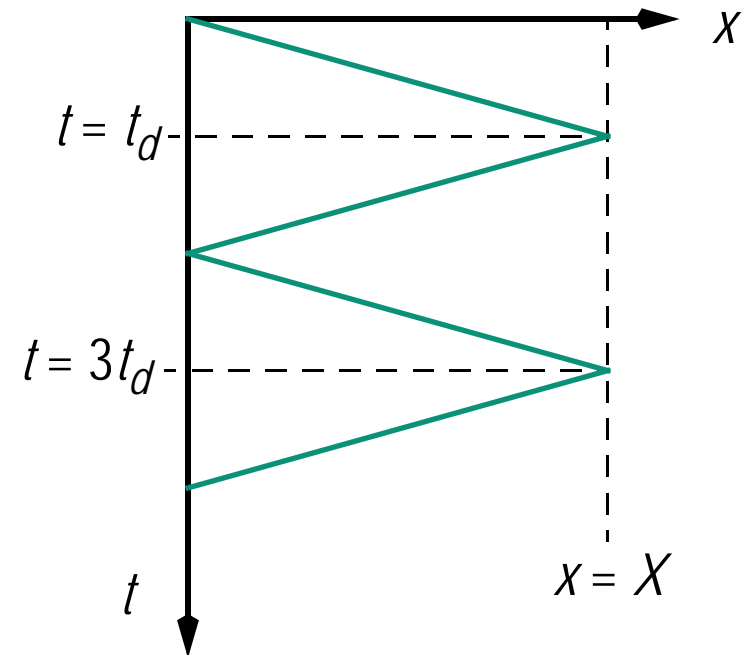
- ◆ Man får problem med reflektioner vid abrupta impedansövergångar!
- ◆ Man ska helst inte bara matcha (anpassa) den belastande impedansen, så $Z_L = Z_0$.
Man bör också matcha det drivande stegets impedans så $Z_S = Z_0$, annars reflekteras de eventuella signaler som når tillbaka till källan (Source).
- ◆ **Dock:** V_0 från spänningskällan spänningsdelas ut på ledningen, och matchningen vid det drivande steget medför att bara halva spänningen V_0 skickas iväg!

Rum-tid-diagram

METODIK FÖR REFLEKTIONSANALYS - RUM-TID

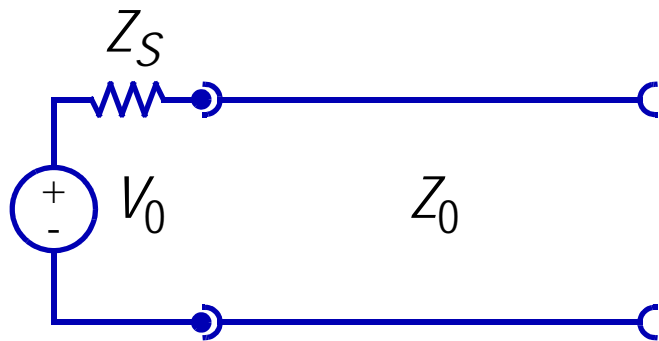


t_d är tiden det tar för signalen att åka sträckan X i transmissionsledningen



- ◆ I ett rum-tid-diagram kan man på ett åskådligt sätt visa hur spänning och ström reflekteras (och transmitteras) i en ledning. Metoden bygger på att de terminerande impedanserna är linjära (d.v.s. R , C eller L), vilket är ett användbart antagande i många sammanhang.

EXEMPEL PÅ RUM-TID-DIAGRAM - RINGNING 1(5)



- ◆ $Z_S = Z_0 / 4$
- ◆ $Z_L \rightarrow \infty$
- ◆ Typiskt fall i CMOS-krets, där drivaren har låg impedans och belastningen hög impedans. Det uppstår **ringning**.

- ◆ Reflektion vid belastningen (till höger):

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \rightarrow \frac{\infty - Z_0}{\infty + Z_0} \rightarrow 1.$$

- ◆ Reflektion vid återkomst till källan (till vänster):

$$\Gamma_S = \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0} = \frac{(Z_0/4) - Z_0}{(Z_0/4) + Z_0},$$

alltså $\Gamma_S = -0,6$.

EXEMPEL PÅ RUM-TID-DIAGRAM - RINGNING 2(5)

1a. Spänningskällan skickar iväg ett steg med

$$\text{spänningen } V_1 = V_0 \cdot \frac{Z_0}{Z_S + Z_0}.$$

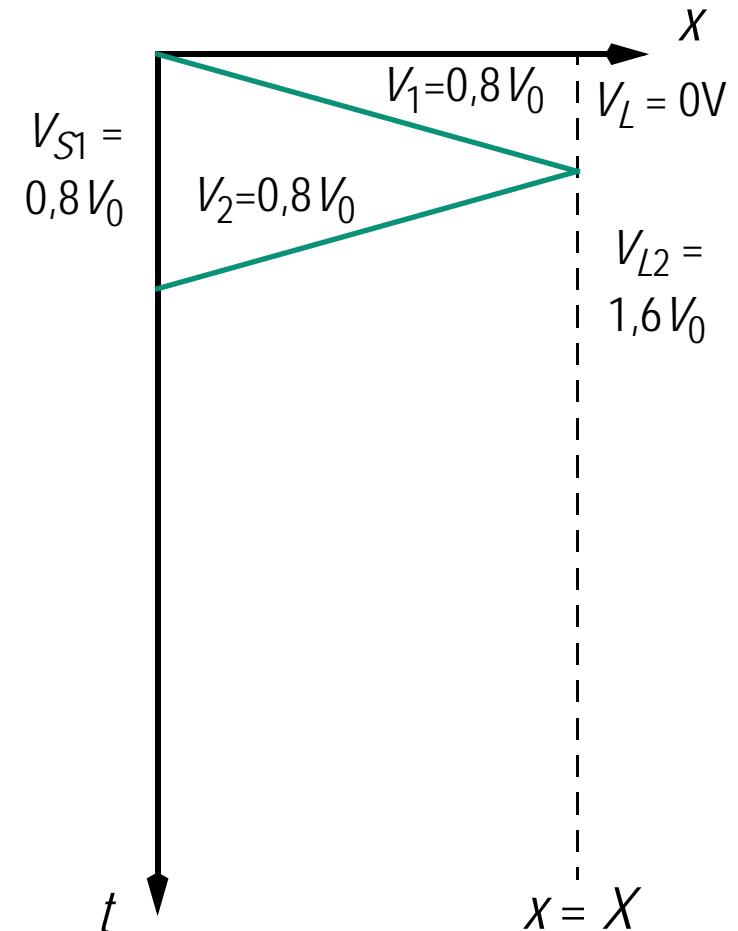
1b. Nu gäller att spänningen i vänster ände av ledningen är $V_{S1} = 0,8 V_0$.

2a. Studs i högra änden av ledningen ger

$$V_2 = V_1 \Gamma_L = V_1,$$

som är steget som reflekteras.

2b. Nu gäller att spänningen i höger ände av ledningen är $V_{L2} = 0,8 V_0 + 0,8 V_0$ (inkommande + reflekterad våg).



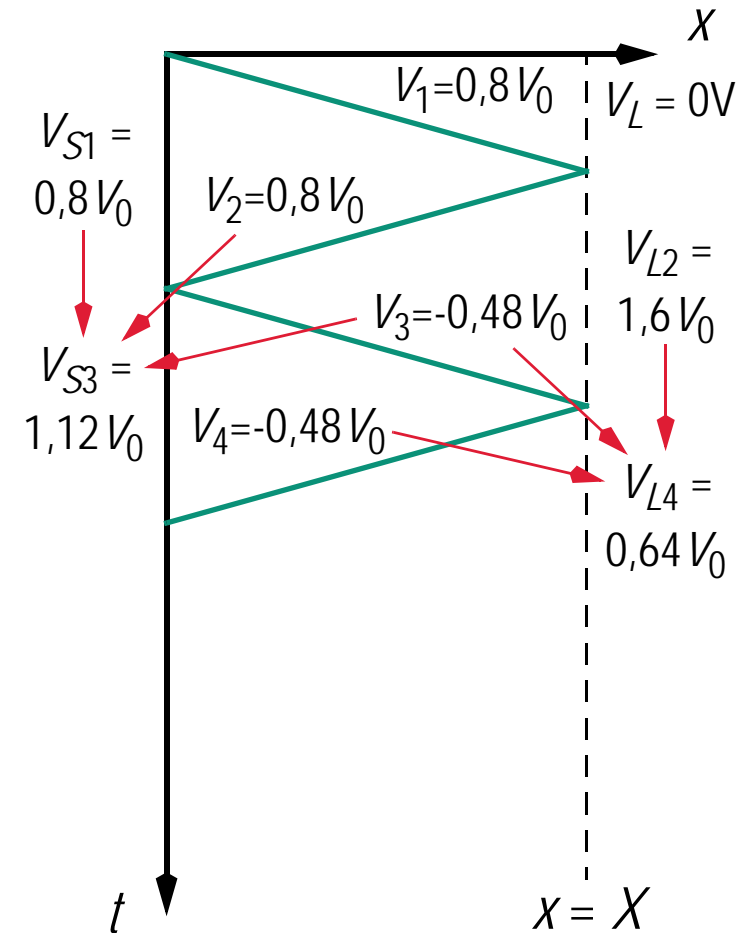
EXEMPEL PÅ RUM-TID-DIAGRAM - RINGNING 3(5)

3a. $V_3 = V_2 \Gamma_S = 0,8 V_0 (-0,6)$.

3b. $V_{S3} = 0,8 V_0 + 0,8 V_0 + V_3$,
då vi lägger ihop tidigare V_S (V_{S1}) med inkommande spänningssvåg med reflekterad spänningssvåg.

4a. $V_4 = V_3 \Gamma_L = V_3$.

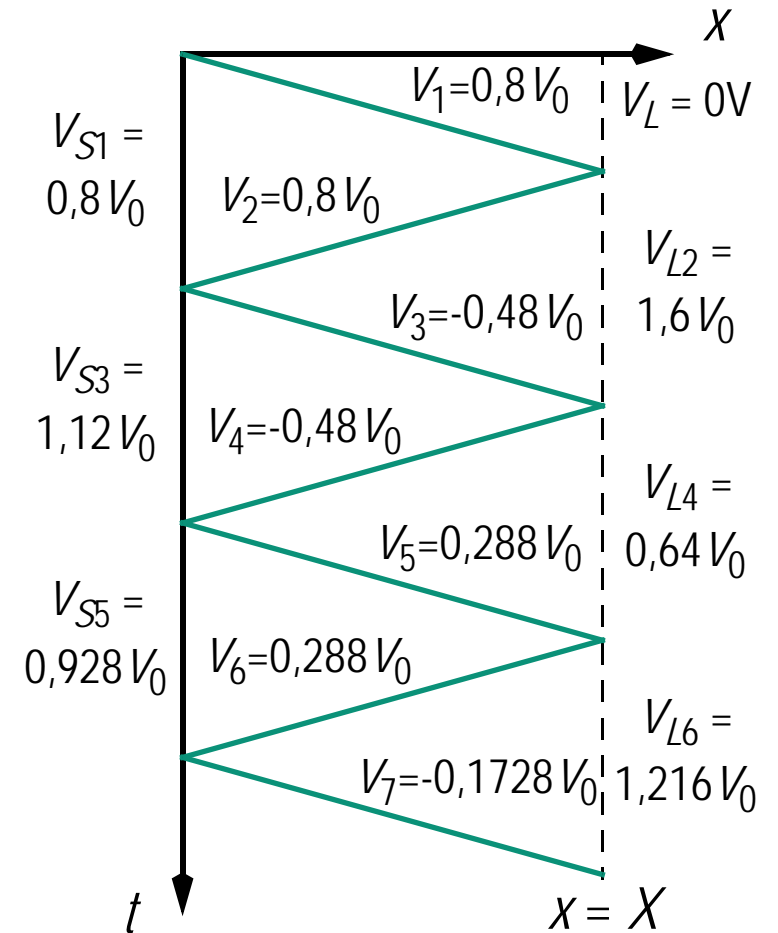
4b. $V_{L4} = 1,6 V_0 - 0,48 V_0 + V_4$,
då vi lägger ihop tidigare V_L (V_{L2}) med inkommande spänningssvåg med reflekterad spänningssvåg.



EXEMPEL PÅ RUM-TID-DIAGRAM - RINGNING 4(5)

5-. Etcetera ...

- ◆ Notera att stegsignalen V_0 som skapas vid källan antas ligga kvar på V_0 "för evigt".

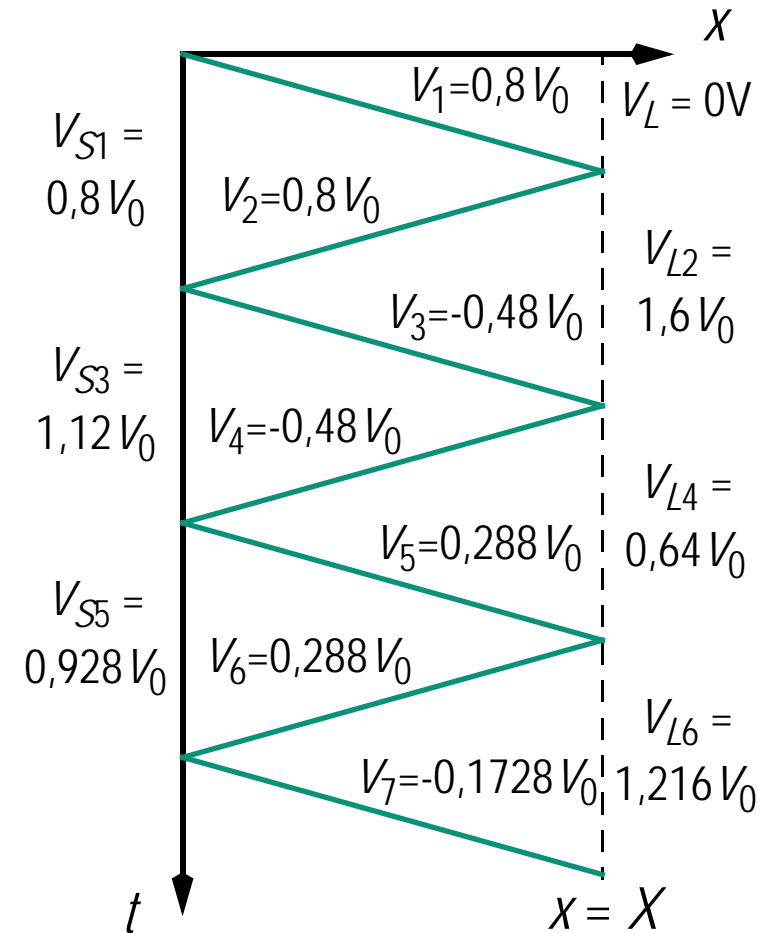
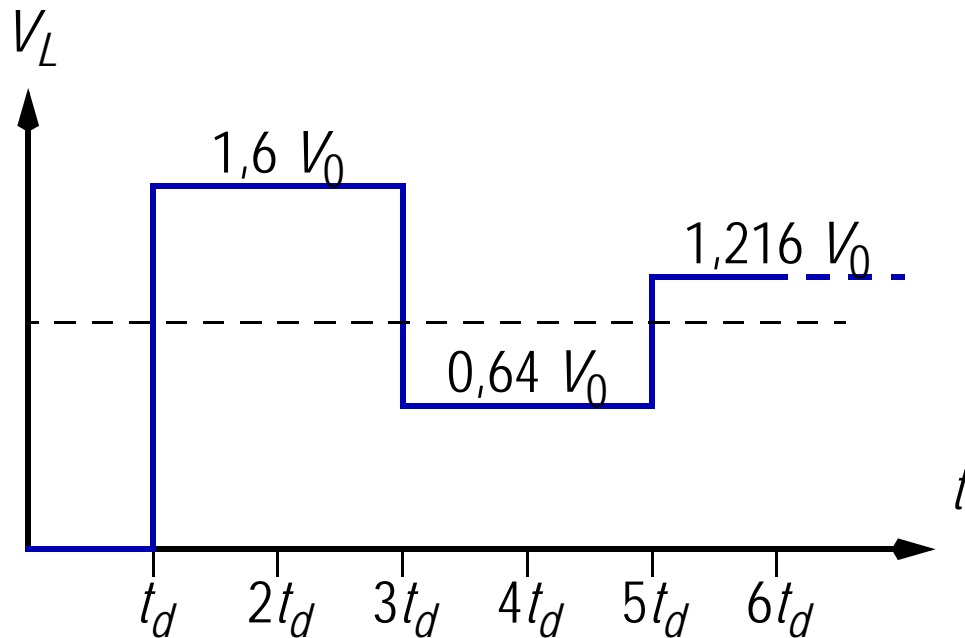


EXEMPEL PÅ RUM-TID-DIAGRAM - RINGNING 5(5)

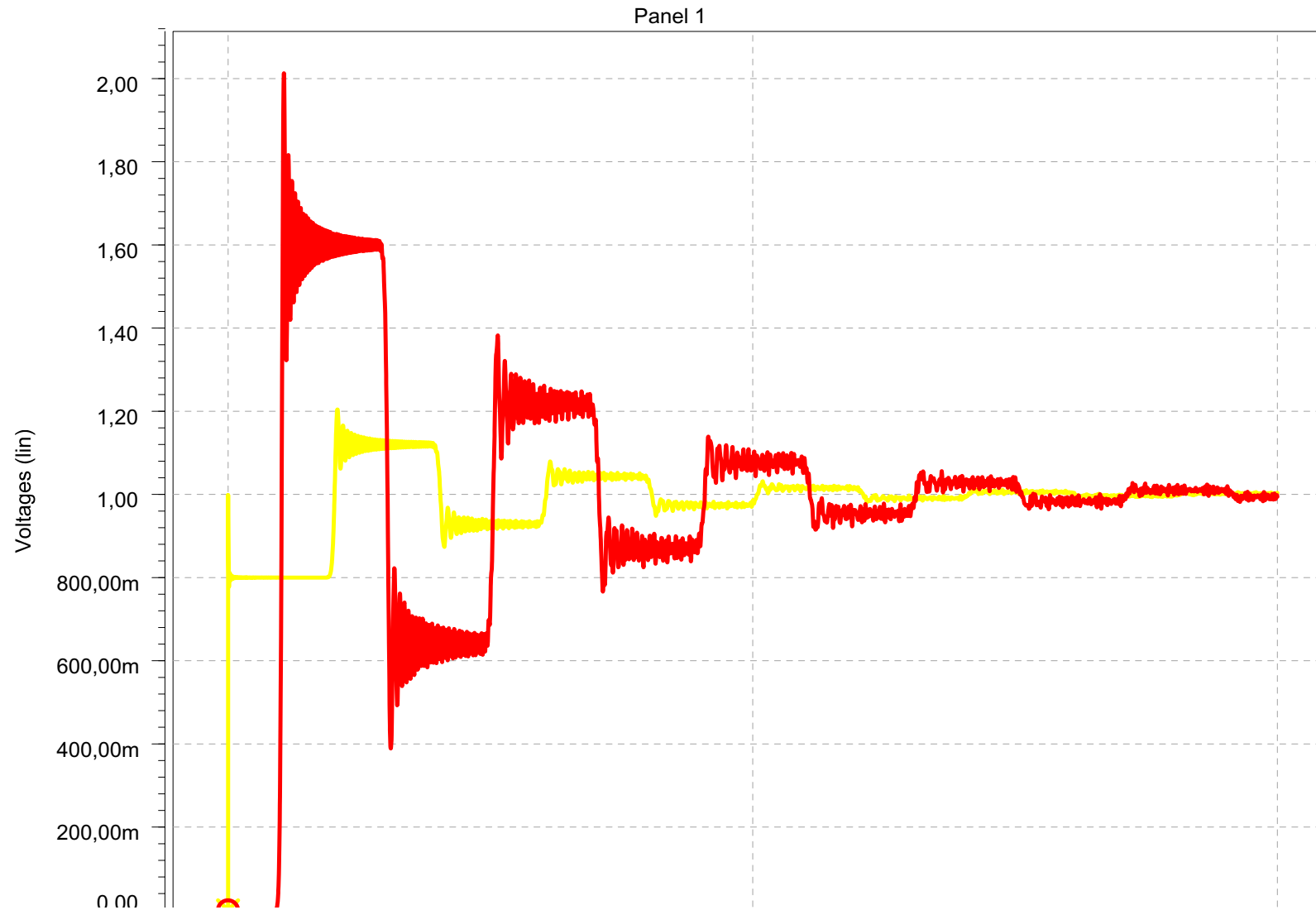
Anta att man mäter spänningen vid belastningen (med en högimpediv prob):

Vad ser man då?

Jo,

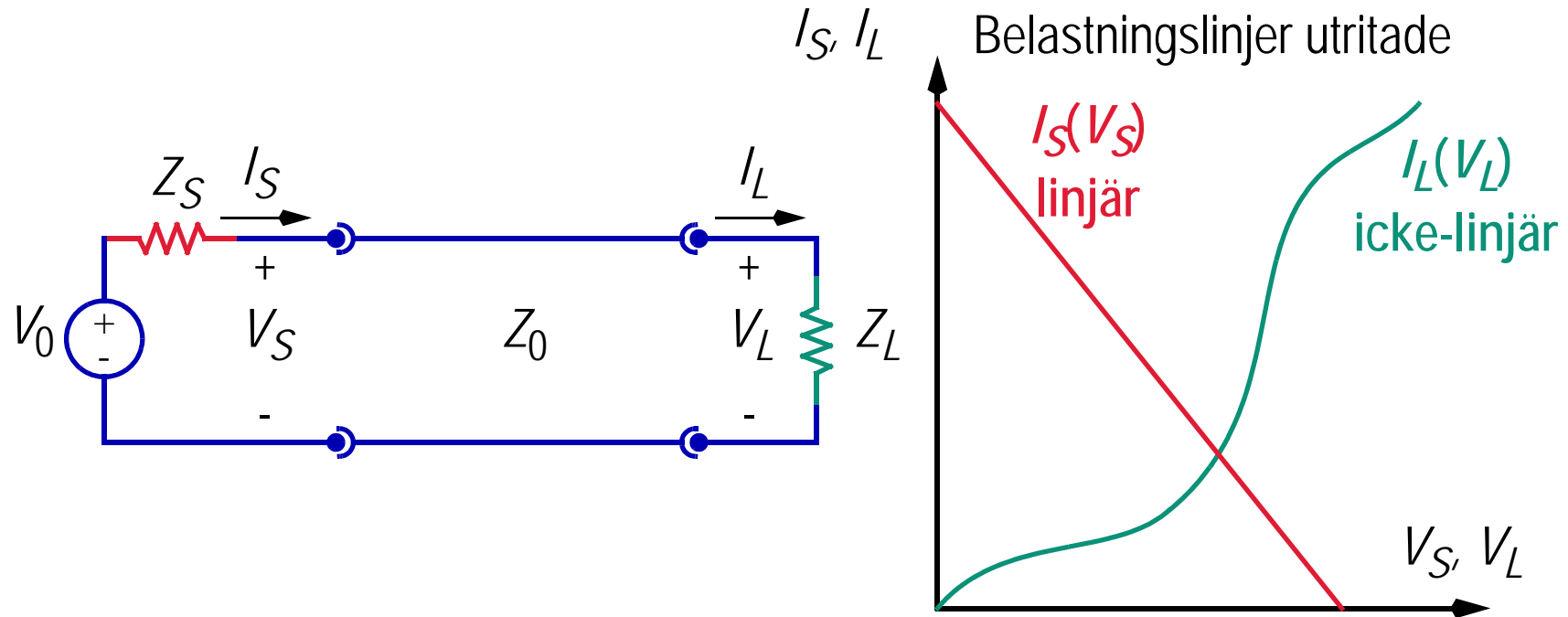


SIMULERING AV EXEMPLET MED RINGNING



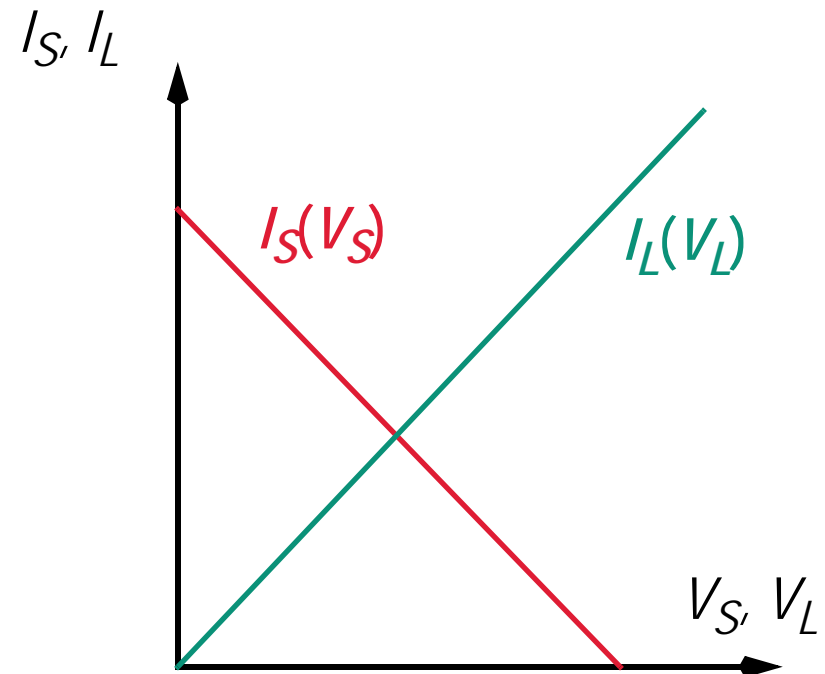
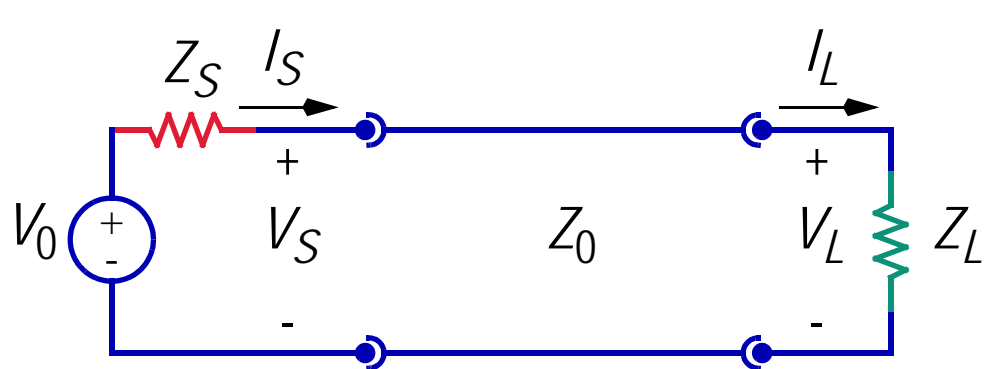
Bergerondiagram

METODIK FÖR REFLEKTIONSANALYS - BERGERON



- ◆ När impedanserna i ändarna av ledningen inte betar sig linjärt (m.a.p. relationen mellan V och I), måste en annan analysmetod tas till: Bergerondiagrammet.
 - Bergeron var en fransk hydraulikingenjör ... 1949 ... för vattenvågor.

DEFINITION AV BERGERONDIAGRAM

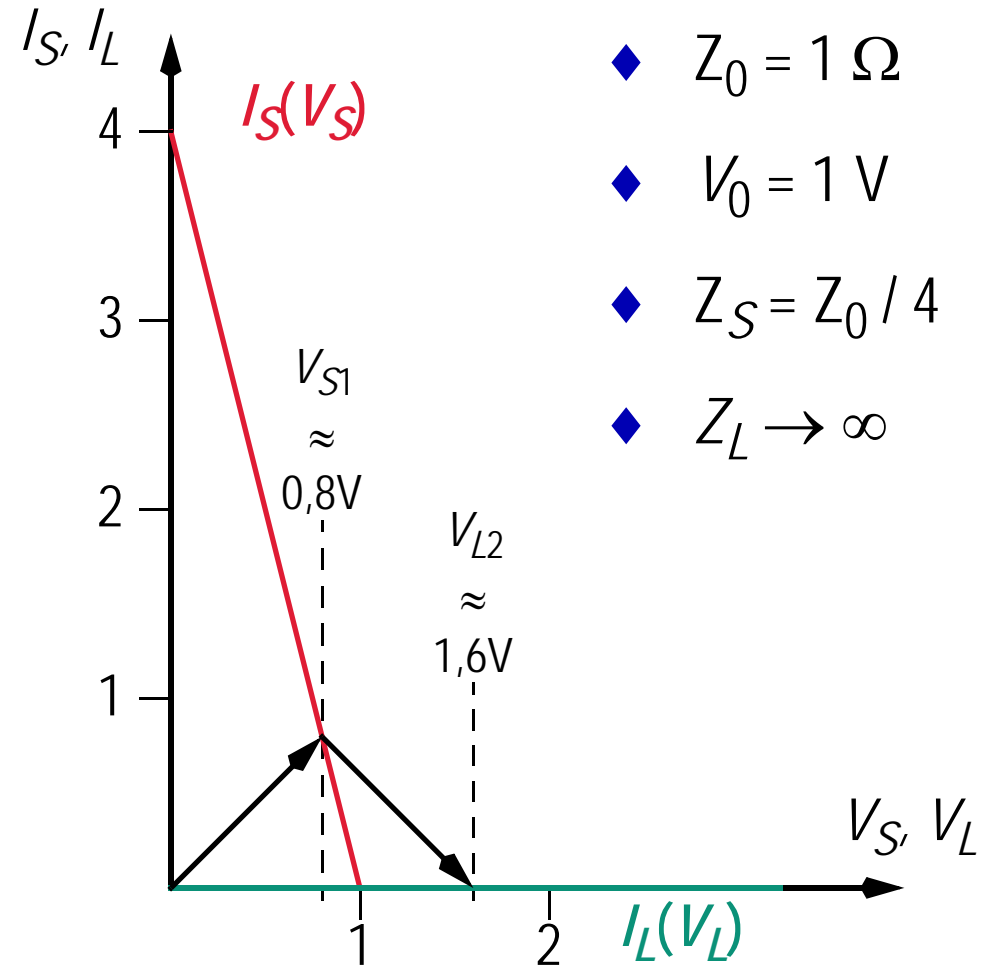


- ◆ $V_S = V_0 - Z_S I_S$, men för att passa in i grafen skriver vi istället $I_S = \frac{V_0 - V_S}{Z_S}$.
- ◆ $V_L = Z_L I_L$, men för att passa grafen skriver vi istället $I_L = V_L / Z_L$.

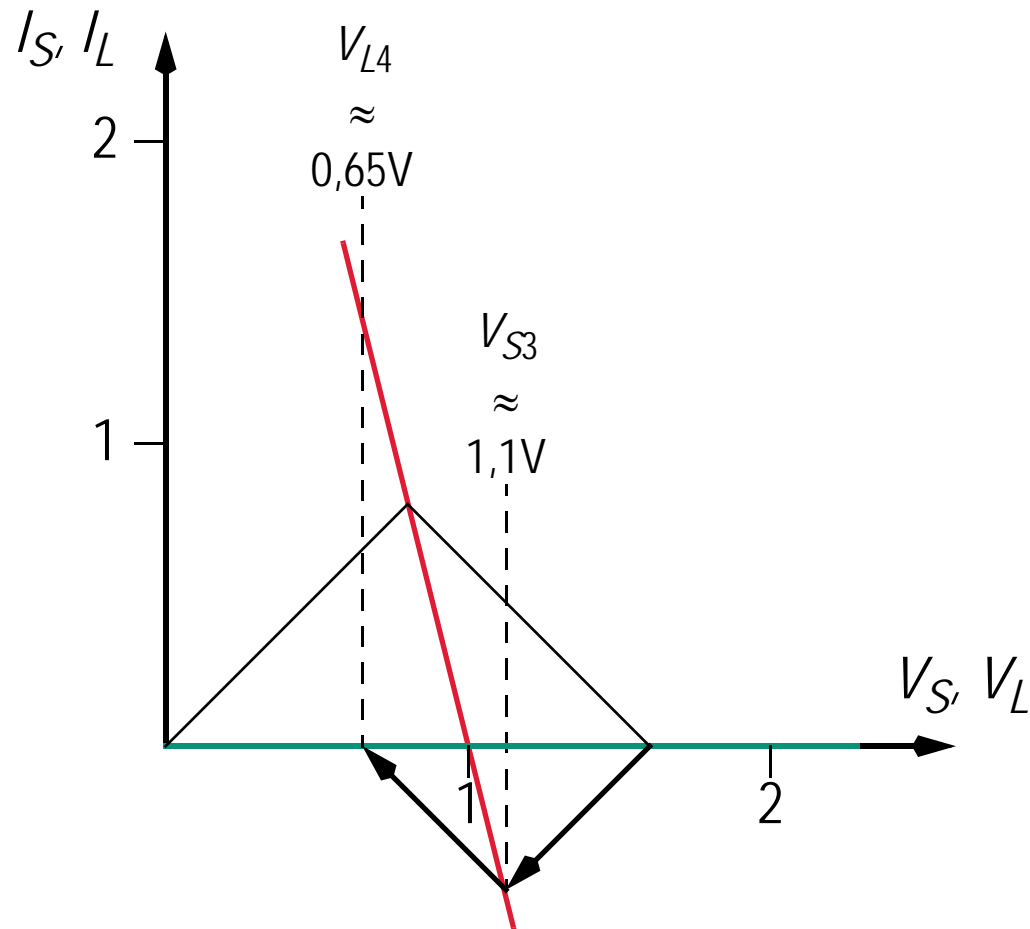
- ◆ Antag Z_S och Z_L är linjära.
- ◆ Notera att skärningen motsvarar steady-state.

BERGERONDIAGRAM FÖR RUM-TID-EXEMPLET 1(2)

- ◆ Jag väljer $Z_0 = 1 \Omega$, för att få en lutning (på funktionerna vi ritar) som är enkel att räkna fram.
 - Lutningen blir ju då antingen 1 eller -1.
- ◆ Pröva och jämför spänningarna som erhålls här, med dem vi fick fram i exemplet med rum-tid-diagram.



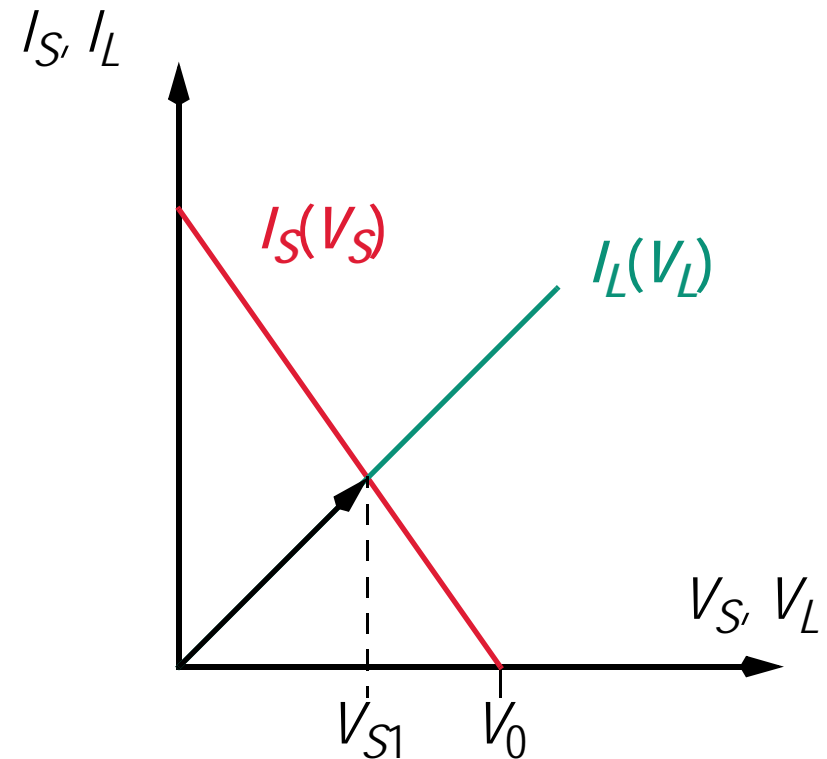
BERGERONDIAGRAM FÖR RUM-TID-EXEMPLET 2(2)



BERGERONDIAGRAM MED $Z_L = Z_0$

- ◆ $I_S = \frac{V_0 - V_S}{Z_S}$ (källan).
- ◆ $I_L = V_L / Z_0$ (belastningen).
- ◆ $I = V / Z_0$ (ledningen).
- ◆ Notera att vi direkt når fram till skärningspunkten mellan I_S och I_L . Det betyder att metoden är avslutad och att V_{S1} är steady-state spänningen

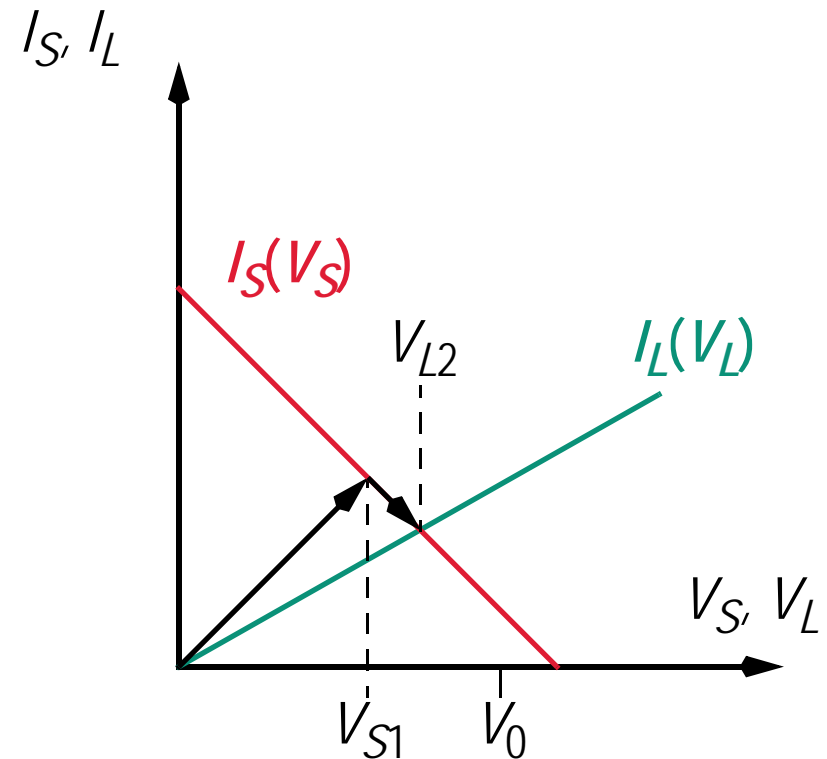
$$V_{\text{steady-state}} = V_0 \cdot \frac{Z_0}{Z_S + Z_0}.$$



BERGERONDIAGRAM MED $Z_S = Z_0$

- ◆ $I_S = \frac{V_0 - V_S}{Z_0}$ (källan).
- ◆ $I_L = V_L / Z_L$ (belastningen, $Z_L > Z_0$).
- ◆ $I = V / Z_0$ (ledningen).
- ◆ $V_{S1} = V_0 \cdot \frac{Z_0}{Z_S + Z_0} = \frac{V_0}{2}$.
- ◆ Eftersom $Z_L > Z_0$ är

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} > 1, \text{ så } V_{L2} > V_{S1}.$$

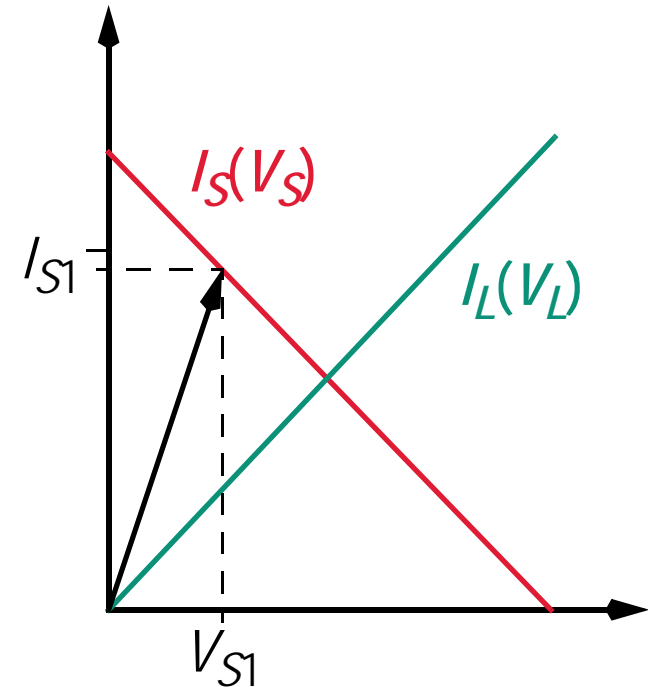


Appendix: Härledning av Bergerondiagrammet

HÄRLEDNING AV BERGERONMETODEN 1(4)

Hur påverkar spänningssteget V_0 kretsen?

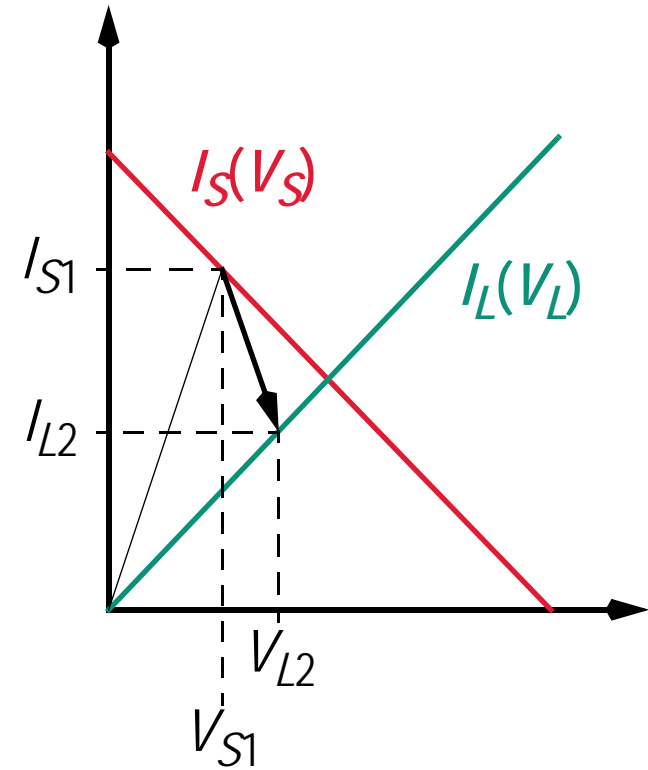
- ◆ Ta reda på hur V_0 ger upphov till startspänningen V_{S1} vid tiden $t = 0$.
- ◆ Vi kan lösa ekvationssystemet kring spänningsdelningen mellan Z_S och Z_0 :
 $I_S = V_S / Z_0$ [den feta svarta linjen]
 $I_S = (V_0 - V_S) / Z_S$ [den röda linjen]
- ◆ Skärningspunkten mellan ritade belastningslinjer ger samma (I_{S1}, V_{S1}) .



HÄRLEDNING AV BERGERONMETODEN 2(4)

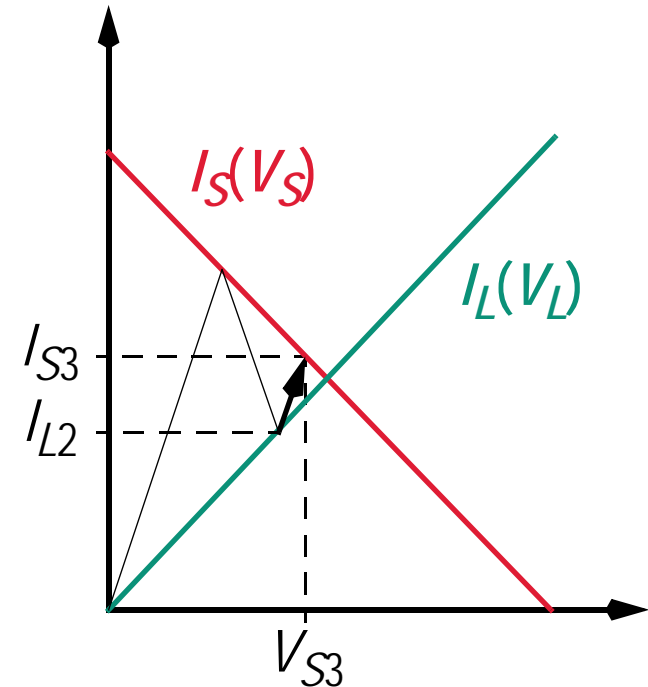
- ◆ $I_L^+ = -V_L^+ / Z_0$, där I_L^+ och V_L^+ reflekteras från belastningen vid t_d^+ .
- ◆ $I_L^+ = I_L - I_L^- = -(1/Z_0)(V_L - V_L^-)$, där I_L^- och V_L^- är infallande vågor i $t = t_d^-$.
- ◆ Eftersom $I_L^- = I_{S1}$ och $V_L^- = V_{S1}$ fås

$$\begin{cases} I_L - I_{S1} = -\frac{1}{Z_0}(V_L - V_{S1}) \text{ [fet svart linje]} \\ I_L = V_L / Z_S \text{ [grön linje]} \end{cases}$$



HÄRLEDNING AV BERGERONMETODEN 3(4)

- ◆ $I_S^+ = V_S^+ / Z_0$, där I_S^+ och V_S^+ reflekteras från källan vid $t = 2t_d^+$.
- ◆ Totala strömmen genom källan i $t = 2t_d^+$ är $I_S = I_S^- + I_S^+ + I_{S1}$. Detta beror på att vi fick en spännings- och strömnivå etablerad över källan vid $t = 0^+$ som tillsammans med infallande och reflekterande vågor ger totala spännings- och strömnivån vid $t = 2t_d^+$. (Jämför med rum-tid-diagrammet ...).



HÄRLEDNING AV BERGERONMETODEN 4(4)

- ◆ Nu kan vi skriva $I_S^+ = I_S - I_S^- - I_{S1}$.
- ◆ Men nu är faktiskt $I_S^- + I_{S1} = I_{L2}$!
- ◆ Alltså fås $I_S^+ = I_S - I_{L2}$ vilket ger

$$I_S - I_{L2} = \frac{1}{Z_0}(V_S - V_{L2}).$$
- ◆
$$\begin{cases} I_S - I_{L2} = \frac{1}{Z_0}(V_S - V_{L2}) \text{ [fet svart linje]} \\ I_S = (V_0 - V_S)/Z_S \text{ [röd linje]} \end{cases}$$

