

Übungen zur Vorlesung Lambda-Kalkül

Blatt 2

Aufgabe P-5 (Alternatives Ziffernsystem): Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den λ -Term $\ulcorner n \urcorner$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\ulcorner 0 \urcorner &:= \mathbf{I} := \lambda x x \\ \ulcorner n + 1 \urcorner &:= \langle \mathbf{F}, \ulcorner n \urcorner \rangle = \lambda x. x \mathbf{F} \ulcorner n \urcorner = \lambda x. x (\lambda y z. z) \ulcorner n \urcorner\end{aligned}$$

Definieren sie für dieses Ziffernsystem Vorgänger- und Nachfolger-Funktion und Test auf Null.

Aufgabe P-6 (Wechselseitige Rekursion): Sei \mathbf{Fix} ein Fixpunkt-Kombinator, d.h., $\mathbf{Fix} x =_{\beta} x (\mathbf{Fix} x)$. Sei $p \equiv \mathbf{Fix} (\lambda \langle x, y \rangle. \langle t_1, t_2 \rangle)$, $X \equiv \mathbf{fst} p$ und $Y \equiv \mathbf{snd} p$. Zeigen Sie, dass $X =_{\beta} t_1[X/x][Y/y]$ und $Y =_{\beta} t_2[X/x][Y/y]$.

Aufgabe P-7 (Nicht-Konfluenz von surjektiven Paaren): Betrachten Sie die Erweiterung des λ -Kalküls um einen Konstruktor und Destruktoren für Paare, d.h., um drei Konstanten \mathbf{fst} , \mathbf{snd} , \mathbf{Pair} . Wir schreiben $\langle t_1, t_2 \rangle$ für $\mathbf{Pair} t_1 t_2$ (Konstante \mathbf{Pair} angewendet auf zwei Terme). Die Relation \longrightarrow sei die kleinste kongruente Relation über den Axiomen β und

$$\overline{\mathbf{fst} \langle t_1, t_2 \rangle} \longrightarrow t_1 \quad \overline{\mathbf{snd} \langle t_1, t_2 \rangle} \longrightarrow t_2 \quad \overline{\langle \mathbf{fst} t, \mathbf{snd} t \rangle} \longrightarrow t$$

Zeigen Sie, dass \longrightarrow nicht konfluent ist. (Hinweis: Modifizieren Sie das in der Vorlesung angegebene Beispiel für Nicht-Konfluenz von Klop.)

Aufgabe P-8 (Modifizierte Diamanteigenschaft): Eine Relation \longrightarrow habe die *modifizierte Diamanteigenschaft* falls $t \longrightarrow t_1$ und $t \longrightarrow t_2$ impliziert: Entweder $t_1 \equiv t_2$ oder es gibt ein t_3 mit $t_1 \longrightarrow t_3$ und $t_2 \longrightarrow t_3$. Zeigen Sie:

- Hat \longrightarrow die modifizierte Diamanteigenschaft, so ist \longrightarrow konfluent.
- Eta-Reduktion \longrightarrow_{η} ist die kleinste kongruente Relation über dem Axiomenschema: $\lambda x. (tx) \longrightarrow_{\eta} t$ falls $x \notin \mathbf{FV}(t)$. Zeigen Sie, dass \longrightarrow_{η} die modifizierte Diamanteigenschaft besitzt.

Aufgabe H-4 (Barendregt, 4 Punkte): Finden Sie Terme K^∞ , r mit $K^\infty x =_\beta K^\infty$ und $r x =_\beta x r$.

Aufgabe H-5 (Parallele Reduktion, 4 Punkte): Sei $l := \lambda x x$ und $1 := \lambda x y. x y$, und $t = l 1 l$. Für welche t_i gilt $t \implies t_i$?

- a) $t_1 = 1 l l$
- b) $t_2 = 1 l$
- c) $t_3 = l l$
- d) $t_4 = l$

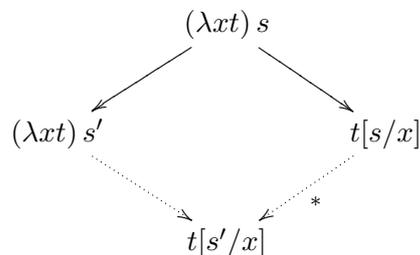
Aufgabe H-6 (Konfluenz und Seiteneffekte, 4 Punkte): Programmiersprachen mit Seiteneffekten sind nicht konfluent, deswegen ist dort die Auswertungsreihenfolge fest vorgeschrieben.

Betrachten Sie die Sprache L , die den λ -Kalkül um einen 1-Bit-Speicher erweitert, d.h. um Konstanten 0, 1 (Bit-Werte), `get` (Lesen des Speichers) und `set` (Schreiben des Speichers). Die Reduktion \longrightarrow ist eine binäre Relation auf $\{0, 1\} \times L$, induktiv definiert durch die folgenden Regeln:

$$\begin{array}{c} \overline{(b, \text{get})} \longrightarrow (b, b) \quad \overline{(b, \text{set } 0)} \longrightarrow (0, 0) \quad \overline{(b, \text{set } 1)} \longrightarrow (1, 1) \\ \\ \overline{(b, (\lambda x t) s)} \longrightarrow (b, t[s/x]) \quad \frac{(b, t) \longrightarrow (b', t')}{(b, \lambda x t) \longrightarrow (b', \lambda x t')} \\ \\ \frac{(b, r) \longrightarrow (b', r')}{(b, r s) \longrightarrow (b', r' s)} \quad \frac{(b, s) \longrightarrow (b', s')}{(b, r s) \longrightarrow (b', r s')} \end{array}$$

Z.B. $(1, \text{set get}) \longrightarrow (1, \text{set } 1) \longrightarrow (1, 1)$. Zeigen Sie, dass \longrightarrow nicht konfluent ist.

Aufgabe H-7 (Lokale Konfluenz von surjektiven Paaren, 8 Punkte): Beweisen Sie, dass \longrightarrow aus Aufgabe P-7 lokal konfluent ist. Dabei genügt es für jeden auftretenden Fall ein kommutierendes Diagramm zu zeichnen, z.B.:



Abgabe der bearbeiteten Übungen (H-4 bis H-7): Freitag, 17. November 2006, zu Beginn der Vorlesung. Wurden die Aufgaben in einem Zweierteam bearbeitet, können die Lösungen auch gemeinsam eingereicht werden.