Du får använda dig av följande predikat:

- Prim(x) = “x är ett primtal”
- Even(x) = “x är ett jämnt tal”
- x < y = “x är mindre än y”
- (och även x = y, x > y, x <= y, x >= y, x /= y)
- x | y = “x delar y”

Här är några påståenden:

1. Alla tal är primtal.

2. Det finns ett jämnt primtal.

3. Alla primtal större än 2 är inte jämna.

4. Summan av vilka två heltal som helst är större än 0.

5. För alla jämna heltal finns det två udda heltal vars summa är lika med det talet.

6. Det finns ett naturligt tal som är mindre än alla andra naturliga tal.

7. Det finns ett tal som delar alla heltal.

8. Det finns inget tal som är större än sig själv.

9. Alla naturliga tal är antingen jämna eller primtal.

10. Två olika primtal kan inte dela varandra.

Här är formler:

---

1. Alla tal är primtal.

$$\forall x \in \mathbb{Z} : Prim(x)$$

---

2. Det finns ett jämnt primtal.

$$\exists x \in \mathbb{Z} : (Even(x) \wedge Prim(x))$$

Eftersom det inte var explicit angivet i uppgiften går det bra med $\mathbb{N}$ med.

---

3. Alla primtal större än 2 är inte jämna.

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \left[(Prim(x) \wedge x > 2) \rightarrow \neg Even(x) \right]$$

Vi använder implikation, för att vi vill säga "for alla x: OM x är prim och större än 2 DÅ är inte x jämt".

En annan korrekt lösning är:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \left[Prim(x) \rightarrow (x > 2 \rightarrow \neg Even(x)) \right]$$

Vi vill säga "för alla primtal…", som skrivs som:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \left[Prim(x) \rightarrow ... \right]$$

"OM det är större än två, ska det inte vara jämt", som skrivs som:

$$x > 2 \rightarrow \neg Even(x)$$

Sätter vi ihop detta får vi andra lösningen.

---

4. Summan av vilka två heltal som helst är större än 0.

$$\forall x,y \in \mathbb{Z} : x+y > 0$$

Vi kan också säga:

$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x+y > 0,$

som är korrekt men det är mera klottrigt.

---

5. För alla jämna heltal finns det två udda heltal vars summa är lika med det talet.

$\forall x \in \mathbb{Z} : (\text{Even}(x) \rightarrow \exists y,z \in \mathbb{Z} : (\neg\text{Even}(y) \wedge \neg\text{Even}(z) \wedge y+z = x))$

Hur kom vi nu på detta? Vi börjar med “för alla jämna heltal …”. Detta skrivs som:

$\forall x \in \mathbb{Z} : (\text{Even}(x) \rightarrow \ldots)$

Och sen vill vi säga “det finns två udda heltal …”. Detta skrivs som:

$\exists y,z \in \mathbb{Z} : (\neg\text{Even}(y) \wedge \neg\text{Even}(z) \wedge \ldots)$

Och till sist säger vi “vars summa är lika med det talet”, som skrivs som:

$y+z = x$

Sätter vi ihop allt detta får vi svaret.

---

6. Det finns ett naturligt tal som är mindre än alla andra naturliga tal.

$\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : (y \neq x \rightarrow x < y)$

“Det finns ett naturligt tal x sådant att…”:

$\exists x \in \mathbb{N} : \ldots.$

“för alla andra naturliga tal y…”:

$\forall y \in \mathbb{N} : (y \neq x \rightarrow \ldots)$

“ska x vara mindre än y”: $x < y$.

---

7. Det finns ett tal som delar alla heltal.

$\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x \mid y$

8. Det finns inget tal som är större än sig själv.

$\neg \exists x \in \mathbb{Z} : x > x$

9. Alla naturliga tal är antingen jämna eller primtal.

$\forall x \in \mathbb{N} : (Even(x) \lor Prim(x))$

10. Två olika primtal kan inte dela varandra.

$\forall x,y \in \mathbb{Z} : \left[(Prim(x) \land Prim(y) \land x \neq y) \rightarrow \neg(x \mid y \lor y \mid x) \right]$

"Två olika primtal…":

$\forall x,y \in \mathbb{Z} : \left[(Prim(x) \land Prim(y) \land x \neq y) \rightarrow ... \right]$

"...kan inte dela varandra":

$\neg(x \mid y \lor y \mid x)$

Här är bevis / motbevis:

---

1. Alla tal är primtal.

Detta är fel.

Ett motbevis är ett exempel på ett tal som inte är ett primtal, t.ex. 4.

---

2. Det finns ett jämnt primtal.

Detta stämmer.

Ett bevis är ett exempel på ett jämnt primtal, t.ex. 2 (som råkar vara det enda exemplet).

---

3. Alla primtal större än 2 är inte jämna.

Detta stämmer.

Ett bevis måste vara ett generellt argument om alla primtal.

Vi väljer ett motsägelsebevis. Tänk om vi hade ett primtal p som är större än 2, men jämnt i alla fall. Eftersom p är jämnt är det delbart med 2. Eftersom p är större än 2 är det inte lika med 2. Alltså har vi en delare av p som inte är 1 eller p, och det betyder att p inte är ett primtal. Detta motsäger vårt antagande.

---

4. Summan av vilka två heltal som helst är större än 0.

Detta är fel.

Ett motbevis är två tal vars summa inte är större än 0. T.ex. 0 och 0.

---

5. För alla jämna heltal finns det två udda heltal vars summa är lika med det talet.

Detta stämmer.

Ett bevis involverar ett generellt argument om alla jämna heltal.

Ta vilket jämnt heltal som helst, kalla det x. Ta nu 1 och x-1. 1 är udda, och x-1 är udda med (eftersom x är jämnt). Summan av 1 och x-1 (två udda tal) är x. Vilket var det som skulle visas.

---

6. Det finns ett naturligt tal som är mindre än alla andra naturliga tal.

Det stämmer.

Ett bevis är ett exempel på ett sådant naturligt tal, t.ex. 0, som är mindre än alla andra naturliga tal (som även råkar vara enda exemplet).

---

7. Det finns ett tal som delar alla heltal.

Det stämmer.

Ett bevis är ett exempel på ett sådant tal, t.ex. 1 som delar alla tal.

---

8. Det finns inget tal som är större än sig själv.

Det stämmer.

Ett bevis är ett generellt resonemang om alla tal.

Vi väljer motsägelsebevis. Tänk om vi hade ett tal x sådant att x > x. Det skulle betyda att x /= x, som inte kan vara sant. Alltså är vårt antagande falskt.

---

9. Alla naturliga tal är antingen jämna eller primtal.

Det är fel.

Ett motbevis är ett exempel på ett ojämnt naturligt tal som inte är ett primtal, t.ex. 15.

---

10. Två olika primtal kan inte dela varandra.

Det stämmer.

Ett motbevis är ett generellt resonemang om alla par av olika primtal.

Ta två olika primtal, kalla den minsta för p och den största för q. Det kan inte vara så att $q \mid p$, eftersom $q > p$. Det kan inte vara så att $p \mid q$ eftersom q är ett primtal och dess enda delare är 1 och q.