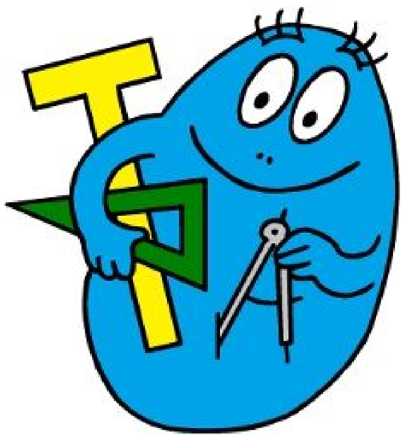
TENTAMEN DIT980

Diskret Matematik för Datavetare

24 oktober 2015, 8:30 - 12:30



- Det finns totalt **7 uppgifter**.
- Läs igenom alla uppgifter noga **innan du börjar**, och försäkra dig om att du förstår.
- I dina svar, ange tydligt **vilken uppgift** det är du svarar på.
- Skriv **tydligt** och **överskådligt**. Skriv rent dina svar; vi som rättar vill **inte se ditt kladd**.
- Tillåtna hjälpmedel:
    - En **handskriven A4-sida** med anteckningar **på 1 sida**. Anteckningarna ska lämnas in tillsammans med dina svar.
    - En **godkänd miniräknare**.

Varje uppgift kan ge 0, 1, eller 2 poäng:

- 0p = svaret på uppgiften är otillräckligt
- 1p = svaret innehåller bra saker men också några brister
- 2p = svaret är tillräckligt bra (men får innehålla småfel)

Poänggränser: **G** = 7-10p, **VG** = 11-14p.

LYCKA TILL!

Uppgift 1

(a) Förenkla följande logiska formel:

$$(p \lor q) \rightarrow q$$

Förenkla betyder: hitta en ny formel som är enklare men som betyder samma sak.

(b) Visa att din formel betyder samma sak som originalet med hjälp av en sanningstabell.

Uppgift 2

Kolla följande rekursiva funktionsdefinition för funktionen F : $\mathbf{N}^+ \mathrm{x} \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} F(x,0) &= 1 & \\ F(x,n) &= F(x, n/2)^2 & \text{, när n är jämn och } n > 0 \\ F(x,n) &= x \cdot F(x, n-1) & \text{, när n är ojämn} \end{aligned}$$

Bevisa med hjälp av stark induktion över n att $F(x,n) = x^n$, för alla $n \geq 0$.

Uppgift 3

Undersök nedanstående två diofantiska ekvationer. För varje ekvation, ange huruvida den har lösningar och varför. Om den har lösningar, ge då alla lösningar där värdet på x ligger mellan 0 och 30.

(a) $21x + 49y = 14$

(b) $36x + 24y = 18$

Som lösningsmetod krävs det att du använder dig av Bezouts identitet. Visa tydligt vilka steg du tar.

Uppgift 4

För vilka naturliga tal n är summaserien

$$1 + 2 + \ldots + n$$

ett primtal?

Hint: Använd formeln för aritmetiska summor, och använd sedan definitionen av vad ett primtal är.

Uppgift 5

Bevisa att följande utsaga gäller, för alla listor xs:

```
length (rev xs) = length xs
```

Du får använda dig av följande definitioner:

```
length :: [a] -> Integer
length []       = 0
length (x:xs)  = 1 + length xs

rev :: [a] -> [a]
rev []          = []
rev (x:xs)      = rev xs ++ [x]

(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]      ++ ys  = ys
(x:xs)  ++ ys  = x : (xs ++ ys)
```

Du får också använda dig av följande hjälpsats. För alla listor xs, ys:

```
length (xs ++ ys) = length xs + length ys
```

Ange tydligt när du använder den.

Uppgift 6

Givet en oriktad graf G. Vi definierar följande relation R:

R(u,v) = “det finns en väg från u till v i grafen G”

Visa att R är en ekvivalensrelation. Gör detta genom att visa att R är reflexiv, symmetrisk, och transitiv.

Uppgift 7

Jag har en strumplåda med B stycken blå strumpor, och R stycken röda strumpor. B och R är naturliga tal.

En morgon tar jag slumpmässigt 3 strumpor ur lådan. Vad är sannolikheten att alla 3 **inte** har samma färg?

Räkna ut detta genom att först (a) räkna ut det totala antalet möjligheter, och (b) det antalet möjligheter vi faktiskt är intresserade av, och sen (c) den slutgiltiga sannolikheten. Visa alla dessa 3 delsvar i ditt svar.

OBS: Dina svar blir uttryck där du får använda dig av B, R, heltal, multiplikation, addition, subtraktion, division, fakultet, och “över”-funktionen. Du behöver inte spendera tid på att förenkla uttrycken.

(inga fler uppgifter)