Göteborgs Universitet och Chalmers Tekniska Högskola — 16 januari 2007
Datavetenskap — TDA180/TDA181/INN110

Tentamen i kurserna Beräkningsmodeller (TDA181/INN110) och Grundläggande Datalogi (TDA180)

Onsdagen den 17 januari 2007, kl 14.00 – 17.00 i V-huset.
Ansvarig lärare: Bengt Nordström, tel 0730-79 42 89.
Tillåtna hjälpmedel: Inga.
Börja varje uppgift på nytt blad. Skriv endast på en sida av papperet. Varje svar skall motiveras! Svar utan motivering ger inga poäng. Komplicerade lösningar och motiveringar kan ge poängavdrag.
Frågor om tentan kommer endast att besvaras via telefon (0730-79 42 89).

Poäng från hemuppgifter inlämnade under 2006 kan tillgodoräknas.

Kursen är värd 4 p vid Chalmers och 5 p vid universitetet. Detta förklarar följande betygsgränser: CTH: 3=80p, 4=100p, 5=120p, GU: G=100p, VG=150p. Det finns ett fåtal elever på Chalmers som läste motsvarande 3p-kurs. För dem är poänggränserna 3=60p, 4=75p, 5=90p.

Examensvisning kommer att äga rum fredagen den 19 januari kl 14.45 – i Bengt Nordströms tjänsterum. Lösningar till tentan kommer att finnas tillgängliga från kursen Beräkningsmodellers hemsida.

1. Bevisa eller motbevisa följande påståenden:
   (a) Funktionen som är odefinierad för varje argument är beräkningsbar. (5)
   (b) Om M är normalformen av N (i lambda-kalkyl) och N är öppet, så är M öppet. (5)
   (c) Alla slutna uttryck i lambda-kalkyl har en normalform och denna normalform är unik. (5)
   (d) Mängden av totala funktioner från **N** till **Bool** är uppräknelig. (15)
   (e) Mängden av totala funktioner från **Bool** till **N** är uppräknelig. (15)

2. Enligt läroboken är en icketom mängd A uppräkningsbar om det finns en total surjektiv funktion $f \in \mathbf{N} \to A$.
   (a) Är det väsentligt att funktionen skall vara total? (15)
   (b) Är det väsentligt att funktionen skall vara surjektiv? (15)

Om svaret är ja, skall du motivera det genom att visa att de reella talen skulle vara uppräkneliga om kravet inte finns med i definitionen. Om svaret är nej, skall du visa hur man givet en funktion som inte uppfyller kravet kan konstruera en funktion med kravet uppfyllt.

3. (a) Vad är en fixpunktskombinator? (5)

   (b) Ge ett exempel på en fixpunktskombinator och visa att det är en sådan! (5)

   (c) Varför är fixpunktskombinatorer viktiga? (5)

4. Det finns fem programkonstruktioner i språket **PRF**, de primitivt rekursiva funktionerna. De första fyra har en syntax som kan beskrivas informellt på följande sätt: (40)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{z} &\in \mathbf{PRF}_0 \\
\mathbf{s} &\in \mathbf{PRF}_1 \\
\mathbf{proj}(n, i) &\in \mathbf{PRF}_{n+1} \quad \text{if} \quad i \leq n \\
\mathbf{comp}(g, f_1, \ldots, f_m) &\in \mathbf{PRF}_n \quad \text{if } g \in \mathbf{PRF}_m, f_i \in \mathbf{PRF}_n, 1 \leq i \leq m
\end{aligned}
$$

   och semantiken beskrivs informellt som:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{z}() &= 0 \\
\mathbf{s}(j) &= j + 1 \\
\mathbf{proj}(n, i)(j_0, \ldots, j_n) &= j_i \\
\mathbf{comp}(g, f_1, \ldots, f_m)(j_1, \ldots, j_n) &= g(f_1(j_1, \ldots, j_n), \ldots, f_m(j_1, \ldots, j_n))
\end{aligned}
$$

   Ge en informell beskrivning av den konstruktion som saknas!

   Visa också hur man kan uttrycka fakultetsfunktionen som definieras av att $f(0) = 1$ och $f(n) = 1 * 2 * \cdots n$ för alla naturliga tal $n > 0$. För den sista uppgiften är det viktigt att du motiverar svaret, dvs antingen visa att programmet verkligen uppfyller de ekvationer som skall gälla för fakultetsfunktionen eller också visa att ditt sätt att komma fram till programmet är sådant att programmet är korrekt. Det räcker alltså inte att bara ge programmet. Du kan anta att multiplikationsfunktionen redan är definierad.

5. Lös en av följande uppgifter (beroende på om du studerat χ eller PCF):

   (a) Följande uppgift är för de som har studerat språket χ:

i. Skriv ett program prod i χ (utan syntaktiskt socker) som är definierat så att (8)

$$\mathsf{prod}\ n = (0+1) * (1+2) * \ldots * (n-1+n)$$

Du kan anta att vi har definierat funktionerna add och mult som utför additon respektive multiplikation. Förklara hur du representerar de naturliga talen (om du inte vill behöver du inte använda standard-representationen).

ii. Bevisa (med induktion) att ovanstående gäller! (12)

(b) Följande uppgift är för de som studerat PCF:

i. Define a PCF-program that behaves as prod, for any $n > 0$ (8)

$$\mathsf{prod}\ n = (0+1) * (1+2) * \ldots * (n-1+n)$$

ii. What is the output of your PCF-program when applied to the value Zero? Justify by showing the main steps in the reduction of prod Zero. Explain. Here you should assume that both add and mult have the expected semantics. You can use either big or small semantics. (7)

iii. What is the purpose of the fix operator in PCF? (5)
Give a PCF-program that contains no fix operator and that does not terminate. Justify!

Lycka till!