

3.5 Mintermer och maxtermer

3.6 Disjunktiv (SP) normal form och konjunktiv (PS) normal form

Vi börjar med ett enkelt exempel:

$$f(x,y,z) = x y + y z + x'z$$

Rita funktionstabell (3 variabler $\Rightarrow 2^3 = 8$ rader)

Princip för tabellen:

Funktionsvärden ifyllda:

x	y	z	f
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Man konstaterar att invariabelkombinationen (x, y, z) i varje rad i funktionstabellen är unik.

För varje rad i funktionstabellen kan man därför ta fram en unik produkt av invariabler som ger $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. En sådan produkt har alltså värdet 1 endast för den kombination av insignalvärden som motsvarar den aktuella raden. För alla andra insignalkombinationer har produkten värdet 0.

Produkten för andra raden blir t ex: $x' \cdot y' \cdot z$

Om man väljer att ta fram produkter för samtliga rader där funktionen har värdet 1 och adderar dessa produkter blir summan ett uttryck för den booleska funktionen f. En summa av produkter kallas också SP-form.

$$f = x'y'z + x'y z + x y z' + x y z$$

Detta uttryck är speciellt på så sätt att varje term är unik och innehåller samtliga invariabler. Termerna kallas mintermer och funktionen sägs vara skriven på disjunktiv normal form eller SP normal form.

Eftersom det finns en minterm för varje rad i funktionstabellen finns det sammanlagt $2^3 = 8$ mintermer för en funktion av tre variabler. Se tabell 3.8 i kompendiet!

För varje rad i funktionstabellen kan man på samma sätt ta fram en unik summa av invariabler som ger $0 + 0 + 0 = 0$. En sådan summa har alltså värdet 0 endast för den kombination av insignalvärden som motsvarar den aktuella raden. För alla andra insignalkombinationer har summan värdet 1.

Summan för första raden blir tex $(x + y + z)$

Om vi väljer att ta fram sådana summor för samtliga rader där funktionen har värdet 0 och multiplicerar dessa summor blir produkten ett uttryck för den Booleska funktionen f . En produkt av summor kallas också PS-form.

$$f = (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z')$$

Detta uttryck är speciellt på så sätt att varje faktor är unik och innehåller samtliga invariabler. Faktorerna kallas maxtermer och funktionen sägs vara skriven på konjunktiv normal form eller PS normal form.

Eftersom det finns en maxterm för varje rad i funktionstabellen finns det sammanlagt $2^3 = 8$ maxtermer för en funktion av tre variabler. Se tabell 3.9 i kompendiet!

Man ser ibland uttrycket kanonisk form i stället för normal form.

Tabellen nedan visar samtliga min- och maxtermer för funktioner av tre variabler $f(x,y,z)$.

Min- termer	x	y	z	Max- termer
$x' \cdot y' \cdot z'$	0	0	0	$x+y+z$
$x' \cdot y' \cdot z$	0	0	1	$x+y+z'$
$x' \cdot y \cdot z'$	0	1	0	$x+y'+z$
$x' \cdot y \cdot z$	0	1	1	$x+y'+z'$
$x \cdot y' \cdot z'$	1	0	0	$x'+y+z$
$x \cdot y' \cdot z$	1	0	1	$x'+y+z'$
$x \cdot y \cdot z'$	1	1	0	$x'+y'+z$
$x \cdot y \cdot z$	1	1	1	$x'+y'+z'$

En intressant iakttagelse beträffande en godtycklig boolesk funktion f skriven på normalform är att funktionens invers f' innehåller alla de min- eller maxtemer som saknas i funktionen f .

Genom att använda denna egenskap kan man härleda de Morgans formler.

$$f = x \cdot y$$

$$f' = (x \cdot y)' = x' \cdot y' + x' \cdot y + x \cdot y' = x' \cdot y' + x' \cdot y + x \cdot y' + x' \cdot y' = x' \cdot (y' + y) + (x + x') \cdot y' = \underline{x' + y'}$$

$$f = x + y$$

$$f' = (x + y)' = (x' + y')(x' + y)(x + y') = (x' + y' \cdot y)(x + y') = x' \cdot (x + y') = x' \cdot x' + x' \cdot y' = \underline{x' \cdot y'}$$

Minimering av booleska funktioner

Funktionstabellen nedan visar funktionen $f(x,y,z) = x y + y z + x'z$ med funktionsvärdena 0 och 1 ersatta med motsvarande max- resp. mintermer.

x	y	z	f	
0	0	0	0	$x+y+z$
0	0	1	1	$x' \cdot y' \cdot z$
0	1	0	0	$x+y'+z$
0	1	1	1	$x' \cdot y \cdot z$
1	0	0	0	$x'+y+z$
1	0	1	0	$x'+y+z'$
1	1	0	1	$x \cdot y \cdot z'$
1	1	1	1	$x \cdot y \cdot z$

Enligt tidigare resonemang kan funktionen f skrivas som en summa av mintermerna (SP) eller en produkt av maxtermerna (PS) i tabellen ovan.

$$f = x' \cdot y' \cdot z + x' \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z' + x \cdot y \cdot z$$

$$f = (x+y+z) \cdot (x+y'+z) \cdot (x'+y+z) \cdot (x'+y+z')$$

Om alla variabler utom en i två mintermer är lika så kan de lika variablerna "brytas ut" och den "felande" variabeln elimineras enligt exemplet nedan.

$$f = x' \cdot y' \cdot z + x' \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z' + x \cdot y \cdot z = x' \cdot z(y' + y) + x \cdot y(z' + z) = x' \cdot z + x \cdot y$$

Om en funktion skriven på SP-normalform bland sina mintermer har $2^2 = 4$ st som har alla variabler lika utom 2 st, så kan de lika variablerna "brytas ut" och summan i parentesen, som innehåller de "felande" variablerna, elimineras. Detta beror på att summan måste ha värdet 1 eftersom alla fyra termerna är olika och att de två "felande" variablerna bara kan kombineras på $2^2 = 4$ olika sätt. Därmed måste alltid en av termerna ha värdet 1. Se exemplet nedan!

$$g = \dots + xy'zw + xy'zw' + xy'z'w + xy'z'w' = \dots + xy'(zw + zw' + z'w + z'w') = \dots + xy'$$

Generellt gäller att om en funktion skriven på SP-normalform bland sina mintermer har 2^m st, som har alla variabler lika utom m st, så kan de lika variablerna "brytas ut" och den resterande summan i parentesen, som innehåller de "felande" variablerna, elimineras av samma skäl som ovan.

Ett analogt resonemang kan föras för funktioner skrivna på PS-normalform.

Om alla variabler utom en i två maxtermer är lika så kan de lika variablerna "brytas ut" och den "felande" variabeln elimineras enligt exemplet nedan.

$$f = (x+y+z) \cdot (x+y'+z) \cdot (x'+y+z) \cdot (x'+y+z') = (x+z+y \cdot y') \cdot (x'+y+z \cdot z') = (x+z) \cdot (x'+y)$$

Om en funktion skriven på PS-normalform bland sina maxtermer har $2^2 = 4$ st som har alla variabler lika utom 2 st, så kan de lika variablerna "brytas ut" och den resterande produkten, som innehåller de "felande" variablerna, elimineras. Detta beror på att den resterande produkten måste ha värdet 0 eftersom alla fyra faktorerna är olika och att de två "felande" variablerna bara kan kombineras på $2^2 = 4$ olika sätt. Därmed måste alltid en av faktorerna ha värdet 0. Se exemplet nedan!

$$g = \dots \cdot (x+y'+z+w)(x+y'+z+w')(x+y'+z'+w)(x+y'+z'+w') = \\ = \dots \cdot [x+y'+(z+w)(z+w')(z'+w)(z'+w')] = \dots \cdot (x+y')$$

Generellt gäller att om en funktion skriven på PS-normalform bland sina maxtermer har 2^m st, som har alla variabler lika utom m st, så kan de lika variablerna "brytas ut" och den resterande produkten, som innehåller de "felande" variablerna, elimineras av samma skäl som ovan.

Vid minimering av funktioner är det alltså lämpligt att skriva dem på SP- eller PS-normalform och undersöka om det finns 2^m st min- eller maxtermerna som skiljer sig åt i m st variabler, där heltalet m skall väljas så stort som möjligt.

Detta arbete underlättas om man arrangerar min- eller maxtermerna i ett sk **karnaughdiagram**, där man enkelt kan se hur många lika variabler en grupp av min- eller maxtermerna har. Då vet man ju också hur många som skiljer sig åt.

Karnaughdiagram för funktionen $f = x' \cdot y' \cdot z + x' \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z' + x \cdot y \cdot z$
 eller
 $f = (x+y+z) \cdot (x+y'+z) \cdot (x'+y+z) \cdot (x'+y+z')$

		yz			
		00	01	11	10
x	0	$x+y+z$	$x' \cdot y' \cdot z$	$x' \cdot y \cdot z$	$x+y'+z$
	1	$x'+y+z$	$x'+y+z'$	$x \cdot y \cdot z$	$x \cdot y \cdot z'$

Istället för min- och maxtermerna i klartext brukar man använda värdena 1 och 0 i karnaughdiagrammet, som då blir en omritad funktionstabell. Se nedan!

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	1	1	0
	1	0	0	1	1

För funktioner med fyra variabler $f(x,y,z,w)$ organiseras karnaughdiagrammet enligt nedan.

		zw			
		00	01	11	10
xy	00				
	01				
	11				
	10				

Observera graykodningen av yz i de övre diagrammen och av xy och zw i det undre.