Lösningsförslag för tentamen i Datastrukturer (DAT036) från 2011-12-16

Nils Anders Danielsson

1. Låt oss benämna indatalistan `strängar`.

   Vi kan börja med att beräkna varje strängs frekvens genom att använda en hashtabell som mappar strängar till frekvenser:

   ```
   frekvenser ← new hashtabell
   för varje sträng s i strängar
     om s → f finns i frekvenser
       frekvenser.insert(s, f + 1)
     annars
       frekvenser.insert(s, 1)
   ```

   Låt oss säga att listan innehåller n strängar, och att den längsta strängen innehåller w tecken. Det är då rimligt att anta att hashfunktionen kan beräknas på $O(w)$ steg. Om vi vidare antar att hashfunktionen är perfekt[1] så tar insättning/uppslagning i hashtabellen också $O(w)$ tidsenheter (amorterat), och koden ovan tar totalt $O(wn)$ tidsenheter.

   Låt oss nu extrahera en lista med par (s, f) av strängar och frekvenser:

   ```
   sträng-frekvens-par ← frekvenser.list-with-bindings()
   ```

   Den här konverteringen tar $O(n)$ tidsenheter, om hashtabellens lastfaktor $\lambda \geq c$ för någon konstant c oberoende av n.

   Nu kan vi sortera listan m a p andra komponenten, i fallande ordning:

   ```
   sträng-frekvens-par.sort(descending)
   ```

   Här är `descending` en komparator som, då $p_1 = (s_1, f_1)$ och $p_2 = (s_2, f_2)$ jämförs, säger "$p_1 < p_2$" om $f_1 > f_2$, "$p_1 = p_2$" om $f_1 = f_2$, och "$p_1 > p_2$" om $f_1 < f_2$. Sorteringen kan utföras med $O(n \log n)$ jämförelser, och jämförelserna tar konstant tid (givet att vi använder en uniform kostnadsmodell), så tidskomplexiteten blir $O(n \log n)$.

[1] Knappast realistiskt, men förhoppningsvis inte alltför långt från sanningen med realistiska indata.

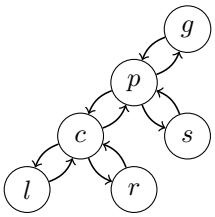
Till sist kan vi skriva ut frekvenserna:

```
för varje par (s, f) i sträng-frekvens-par
  skriv ut s följt av en radbrytning
```

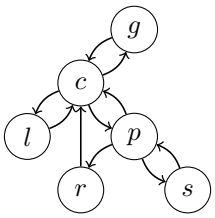
Om vi antar att tiden för en utskrift är $O(c)$, där c är antalet tecken i strängen, så är tidskomplexiteten för utskriften $O(wn)$.

Den totala tidskomplexiteten blir $O(n(w + \log n))$.

2. Implementationen är inte korrekt. Betrakta följande situation:



Efter ett anrop av `rotateUp(`c`)` får vi följande situation:



Notera att vi inte har uppdaterat föräldrapekaren för noden r, vilket betyder att invarianten för `Node` är bruten: r`.parent` $\neq$ `null`, men ändå har vi varken r`.parent.left` $= r$ eller r`.parent.right` $= r$.

Man kan åtgärda felet genom att alltid uppdatera föräldrapekare och barnpekare samtidigt (se inlämningsuppgift 6.3 från 2011 års upplaga av kursen).

3. Man kan implementera ADTn med hjälp av ett splayträd. Operationerna `empty`, `insert` och `lookup` är de vanliga splayträdoperationerna, och har de vanliga tidskomplexiteterna (amorterat):

   - `empty`: $O(1)$.
   - `insert`: $O(\log n)$.
   - `lookup`: $O(\log n)$.

Det återstår att implementera `remove-smaller(`k`)`. Vi kan göra det på följande sätt:

- Försök hitta minsta nyckeln större än eller lika med k.
- Om det inte finns någon sådan nyckel så är alla nycklar mindre än k, och då kan vi avsluta genom att skapa ett nytt, tomt träd.
- Om det finns någon sådan nyckel, splaya upp motsvarande nod till trädets rot, och radera den nya rotens vänstra delträd (som nu innehåller alla nycklar mindre än k).

Med detaljerad rekursiv[2] pseudokod:

```
// Hittar den nod, i delträdet vars rot är r, som har den
// minsta nyckeln som är större än eller lika med k. Om
// det inte finns någon sådan nod ges istället null som
// svar. Roten r får vara null.
Node find-closest-larger-key(Key k, Node r) {
  if (r == null) {
    return null;
  }

  if (r.key == k) {
    return r;
  } else if (r.key < k) {
    return find-closest-larger-key(k, r.right);
  } else {  // r.key > k
    Node n = find-closest-larger-key(k, r.left);
    if (n == null) return r;
               else return n;
  }

}

remove-smaller(k) {
  // Antag att trädklassen innehåller exakt en
  // tillståndsvariabel, root, som pekar på rotnoden.
  Node larger = find-closest-larger-key(k, root);
  if (larger == null) {
    root = null;
  } else {
    splay(larger);
    larger.left = null;
  }
}
```

[2]En iterativ implementation kan vara bättre, eftersom den undviker problem med ”stack overflow”.

Hur effektiv är implementationen ovan? Analysen av splaying visar att sökning efter en nod och splaying av noden till trädets topp har tidskomplexiteten $O(\log n)$ (amorterat, och givet att jämförelser tar konstant tid). I `remove-smaller` utförs inte splayingen om `find-closest-larger-key` inte hittar någon lämplig nod, men det gör inget: Vi skulle kunna ändra koden ovan så att den splayar upp den sista noden som besöktes även om ingen lämplig nod hittas, men eftersom trädet raderas i nästa steg skulle det inte påverka slutresultatet – koden uppför sig *som om* splayingen faktiskt utfördes.

Raderingen av noder med små nycklar (genom att sätta `larger.left` eller `root` till `null`) tar konstant tid och ökar inte trädets potential, så den amorterade tidskomplexiteten är $O(1)$.

Slutsatsen blir att den amorterade tidskomplexiteten för `remove-smaller` är $O(\log n)$.

4. Grafrepresentation: Noder är numrerade från 0 till $n-1$, där n är antalet noder. Grafstrukturen representeras med grannlistor: en array med storlek n, där position i innehåller en länkad lista med nod is direkta efterföljare.

   Vi kan implementera algoritmen i uppgiftsspecifikationen på följande sätt (pseudokod):

```
List<Integer> topological-sort(Graph g) {
  // Stacken.
  List<Integer> stack = new List<Integer>;

  // Array som visar om en viss nod besökts.
  Boolean visited[] = new Boolean[g.number-of-nodes];

  // Initialisering av arrayen.
  for (Integer i = 0; i < g.number-of-nodes; i++)
    visited[i] = false;

  // En lokal procedur med tillgång till variablerna
  // stack och visited.
  void dfs(Integer i) {
    visited[i] = true; // (A)

    for all immediate successors j of i in g {  // (B)
      if (not visited[j])
        dfs(j);
    }

    stack.push(i); // (C)
  }

  // Djupet först-sökning (D).
```

```
  for (Integer i = 0; i < g.number-of-nodes; i++) {
    if (not visited[i])
      dfs(i);
  }

  // Den topologiskt sorterade listan.
  return stack;
}
```

Tidskomplexitetsanalys (givet en graf med noder V och kanter E):

- Allokering av stack: $O(1)$.
- Allokering och initialisering av array: $O(|V|)$.
- Proceduren `dfs` anropas exakt en gång för varje nod, så raderna A och C körs båda $|V|$ gånger, och tar konstant tid varje gång: $O(|V|)$.
- Loopen Bs kropp körs en gång för varje kant, och varje iteration tar konstant tid (om man inte räknar tiden för `dfs(j)`): $O(|E|)$.
- Loopen Ds kropp tar också konstant tid (om man inte räknar tiden för `dfs(i)`): $O(|V|)$.

Totalt: $O(|V| + |E|)$.

5. Låt oss använda potentialmetoden med följande potentialfunktion (där c är arrayens längd, eller kapacitet, och n är listans längd):

$$\Psi(c, n) = k|c - 2n|.$$

Tanken är att potentialen är minst när arrayen är halvfull, och ökar ju närmare vi kommer en fördubbling/halvering av storleken; k är en positiv konstant vars värde förhoppningsvis faller ut från analysen nedan.

Som ett specialfall kan vi definiera att potentialen är 0 innan vi kört `empty`.

Är potentialfunktionen OK? Ja, i och med att potentialen är ickenegativ så är ursprungspotentialen mindre än eller lika med alla möjliga potentialer.

Låt oss nu analysera operationerna:

- `empty`: Tar konstant tid, och ökar potentialen från 0 till k. Den amorterade tidskomplexiteten är alltså $O(1) + k$, vilket är $O(1)$ eftersom k är en konstant.
- `insert`: Om vi inte fördubblar arrayen så tar `insert` konstant tid, och potentialen ökar med

$$\Psi(c, n + 1) - \Psi(c, n) = k|c - 2(n + 1)| - k|c - 2n|,$$

där c och n är kapaciteten och längden *innan* vi satt in det nya elementet. En enkel fallanalys ($c \leq 2n$, $c = 2n + 1$ och $c \geq 2(n + 1)$)

visar att ökningen är som mest $2k$. Den amorterade tidskomplexiteten är då som mest $O(1) + 2k = O(1)$.

Om vi fördubblar arrayens kapacitet från c till $2c$ så är tidskomplexiteten för `insert` $O(c)$ (vi kopierar c element och sätter in ett nytt). Potentialförändringen är

$$\Psi(2c, c+1) - \Psi(c, c) = k|2c - 2(c+1)| - k|c - 2c| = -k(c-2).$$

Den amorterade tidskomplexiteten är $O(c) - k(c-2)$, vilket är $O(1)$ om k kan väljas tillräckligt stor.

- `delete-last`: Borttagningsoperationen kan analyseras på motsvarande sätt. Om kapaciteten inte halveras är den amorterade tidskomplexiteten (notera att $n \geq 1$)

$$\begin{aligned}
&O(1) + \Psi(c, n-1) - \Psi(c, n) = \\
&O(1) + k|c - 2(n-1)| - k|c - 2n| \leq \\
&O(1) + 2k = \\
&O(1).
\end{aligned}$$

Om kapaciteten halveras är den amorterade tidskomplexiteten (notera att c är en tvåpotens och $c \geq 4$)

$$\begin{aligned}
&O(c) + \Psi\Big(\frac{c}{2}, \frac{c}{4}\Big) - \Psi\Big(c, \frac{c}{4} + 1\Big) = \\
&O(c) + k\left|\frac{c}{2} - 2\frac{c}{4}\right| - k\left|c - 2\left(\frac{c}{4} + 1\right)\right| = \\
&O(c) - k\left|\frac{c}{2} - 2\right|.
\end{aligned}$$

Här får vi återigen att den amorterade tidskomplexiteten är $O(1)$ om k kan väljas tillräckligt stor.

M a o blir den amorterade tidskomplexiteten för alla operationer $O(1)$ om vi bara låter k vara tillräckligt stor.

6. Algoritm:

   - Beräkna ett minsta uppspännande träd T. Ett sådant träd existerar eftersom grafen är sammanhängande.
   - Gör en djupet först-sökning i T (inte grafen), med början i en godtycklig nod v, och lägg varje nod sist i en länkad lista p första gången noden besöks. Om man sedan lägger till v sist i listan så representerar p den eftersökta cykeln.

Korrekthet Notera först att p representerar en hamiltonsk cykel eftersom grafen är komplett och innehåller minst två noder. Det återstår

att visa att cykelns längd är max $2w$, där w står för de kortaste hamiltonska cyklernas längd.

Observera nu att trädets totala vikt inte kan vara större än w, för om man tar bort en kant från en kortaste cykel så får man ett uppspännande träd, och alla kanter har ickenegativa vikter. Notera också att djupet först-sökningen i algoritmens andra steg följer varje kant i T exakt[3] två gånger. Beteckna motsvarande väg med p'. Den här vägens totala vikt är max $2w$.

Allt som återstår är att visa att vägen p inte är tyngre/längre än p'. Vägen p har i princip konstruerats genom att utgå från p' och byta ut vissa vägsnuttar $v_1, v_2, ..., v_i$ ($i \geq 3$) mot "genvägar" v_1, v_i (eftersom noderna $v_2, ..., v_{i-1}$ redan hade besökts). Triangelolikheten medför att de här genvägarna aldrig är längre än ursprungsvägsnutten:

$$d(v_1, v_i) \leq d(v_1, v_2) + d(v_2, v_i) \leq ... \leq \sum_{j=1}^{i-1} d(v_j, v_{j+1}).$$

Alltså är p max lika lång som p'.

Effektivitet Antag att grafen har n noder. Då har den $\Theta(n^2)$ kanter (eftersom den är komplett).

Beräkning av minsta uppspännande träd med Prims algoritm tar $O(n^2)$ steg (om man väljer rätt variant av algoritmen, och givet att det tar konstant tid att jämföra två vikter), och djupet först-sökningen tar $O(n)$ steg (eftersom trädet innehåller $n-1$ kanter och vi bara gör konstant mycket extra arbete per nod och kant). Alltså är tidskomplexiteten $O(n^2)$, vilket är effektivt eftersom grafen innehåller $\Theta(n^2)$ kanter.

[3] Eftersom T är ett träd.