
Kombinatorik - anteckningar

Kombinatorik handlar om att räkna ett antal möjligheter. Det finns 4 principer vi använder oss av när vi räknar:

1. **additionsprincipen** - när vi har en antingen / eller situation

Exempel: Jag ska äta lunch och det finns två restauranger att välja mellan. Den ena har 20 sorters olika pizzor, den andra har 5 sorters olika fajitas. Då finns det $20+5=25$ olika luncher jag kan få; jag adderar antalet möjligheter i det ena och i det andra fallet.

2. **multiplikationsprincipen** - när vi måste göra två val, både och

Exempel: Jag ska äta lunch på en restaurang med 2 möjligheter, och efteråt ska jag äta glass på ett glasställe som har 15 olika sorters glass. Då finns det $2*15=30$ olika luncher jag kan få, alla kombinationer mellan lunchrätt och glassort.

3. **subtraktionsprincipen** - när vi har räknat lite för många möjligheter

Exempel: Som ovan, men de har mangochutnet på restaurangen. När jag äter mangochutney till lunch vill jag inte äta glass med mango i, och de har 3 olika sorters mangoglass. Det finns alltså $1*3$ kombinationer som jag inte vill ha, det totala antalet möjliga kombinationer är då $30-3=27$.

4. **divisionsprincipen** - när vi har likvärdiga alternativ

Exempel: Jag ska köpa två olika pizzor, på restaurangen där de har 20 sorters pizzor. Vad är antalet möjligheter? Enligt multiplikationsprincipen har vi 20 möjligheter för den första pizzen, och 19 för den andra, alltså $20*19=380$. Men: jag bryr mig förstås inte i vilken ordning jag köper pizzorna. För varje möjlig pizzakombination (A,B) finns det en likvärdig kombination (B,A) som jag inte vill räkna som ny möjlighet. 380 är alltså för många möjligheter, i själva verket har jag bara $380 / 2 = 190$ möjligheter eftersom jag inte vill räkna både (A,B) och (B,A) som två separata möjligheter.

Exempel med 5 pizzor: Om vi har 5 pizzor A,B,C,D,E och ska köpa 2, då finns det 10 möjligheter: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE. (Notera att t.ex. DA inte finns med eftersom vi redan har AD.) Detta stämmer överens med att räkna ut $(5*4) / 2 = 10$.

Aritmetiska summor

Om vi ska räkna ut hur många sätt det finns att välja 2 saker ur en mängd med n saker, ska vi alltså räkna ut antalet par av olika saker, och sen dela med 2. Formeln för detta blir alltså $n(n-1)/2$.

Det finns ett annat sätt att räkna ut det antalet möjligheter, nämligen såhär. Om vi väljer det första alternativet finns det $(n-1)$ möjligheter kvar till det andra valet. Om vi väljer det andra alternativet, finns det $(n-2)$ möjligheter kvar till det andra valet. Osv. Det totala antalet möjligheter är alltså, enligt additionsprincipen:

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

Som är samma sak som

$$1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1)$$

Vi har precis räknat ut det antalet möjligheter på ett annat sätt, och fick då svaret $n(n-1)/2$. Men eftersom det måste vara lika med vårt andra resultat, har vi:

$$1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) = n(n-1)/2$$

Ett alternativt sätt att bevisa uttrycket för aritmetiska summor!

Permutationer & kombinationer

(se boken)

Sen såg vi permutationer:

- antalet sätt att ordna n saker är $n * (n-1) * \dots * 2 * 1 = n!$, eller n fakultet

- antalet sätt att ordna r saker tagna från en mängd med n saker är $n * (n-1) * \dots * (n-r+1) = n!/(n-r)!$

Och kombinationer:

- antalet sätt att välja r saker från en mängd med n saker är $n!/(n-r)!r! = "n \text{ över } r"$

Födelsedagsparadoxen

Sannolikhet är ett reellt tal $0 \leq p \leq 1$ som anger hur sannolikt en viss händelse är. Vi kan räkna ut sannolikheten p genom att ta:

$$\frac{\text{antalet möjligheter vi vill ha}}{\text{totala antalet möjligheter}}$$

Vi ska nu räkna ut sannolikheten att i en grupp av 41 människor, det finns 2 människor med samma födelsedag.

Först det totala antalet möjligheter. Om vi antar att det finns 365 dagar i ett år, är det totala antalet möjligheter T för 41 personer att ha födelsedagar på:

$$T = 365^{41}$$

De möjligheter vi vill ha är lite svårare att räkna ut. I detta fall (och i många andra fall) är det lättare att först räkna ut de fallen vi inte vill ha. Fallen vi inte vill ha är de där alla är födda på olika dagar! Med andra ord, antalet permutationer av 41 saker från 365 saker. Antalet dåliga saker B är då:

$$B = 365! / (365-41)!$$

Lättare att räkna ut är dock:

$$B = 365 * 364 * \dots * 325$$

Vad är då antalet möjligheter G vi vill ha? Det får man med subtraktionsprincipen:

$$G = T - B$$

Det vi vill ha är alla möjligheter minus det vi inte vill ha.

Sannolikheten är då

$$p = G / T \approx 90\%$$

Räkna ut detta på en dator; talen blir riktigt stora.