Institut für Informatik
der Universität München
Dr. Andreas Abel

WS 2008/09

28. Januar 2009

Übungen zur Vorlesung
Lambda-Kalkül
Blatt 7

Aufgabe P-21 (Beweisterme): Der einfach getypte λ-Kalkül entspricht der konstruktiven Aussagenlogik. Der Funktionspfeil entspricht der Implikation, ein Term eines Typs entspricht dem Beweis einer Aussage. Aussagen sind gegeben durch $A, B, C ::= X \mid A \Rightarrow B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \perp$. Die Aussage $\neg A$ sei Notation für $A \Rightarrow \perp$. Wir erweitern den getypten λ-Kalkül um die Konstanten $\mathsf{Pair}, \mathsf{fst}, \mathsf{snd}, \mathsf{inl}, \mathsf{inr}, \mathsf{case}, \mathsf{abort}$. Die Konstanten haben folgenden Typen für alle A, B, C.

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{pair} & : & A \Rightarrow B \Rightarrow (A \wedge B) \\
\mathsf{fst} & : & (A \wedge B) \Rightarrow A \\
\mathsf{snd} & : & (A \wedge B) \Rightarrow B \\
\mathsf{inl} & : & A \Rightarrow (A \vee B) \\
\mathsf{inr} & : & B \Rightarrow (A \vee B) \\
\mathsf{case} & : & (A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C \\
\mathsf{abort} & : & \perp \Rightarrow C
\end{array}$$

Geben Sie Beweisterme (= λ-Terme) für die folgenden schematischen Aussagen an:

a) $(A \Rightarrow (B \wedge C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$,
b) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow (B \wedge C)$,
c) $A \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,
d) $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \Rightarrow A \vee (B \wedge C)$,
e) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow A \Rightarrow \neg B$,
f) $(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$.

Aufgabe H-25 (De Morgan): Die de Morganschen Gesetze $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ und $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ kann man als vier Implikationen schreiben. Welche dieser Implikationen sind auch konstruktiv gültig?

Aufgabe H-26 (Doppelnegation): Konstruktiv gilt das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten zwar nicht, jedoch dessen doppelte Negation $\neg\neg(A \vee \neg A)$. Konstruieren Sie einen Beweisterm!

Aufgabe P-22 (Modell: Terme modulo β): Eine *applikative Struktur* ist eine Menge D mit Operationen $\mathsf{App} : \mathsf{D} \times \mathsf{D} \to \mathsf{D}$ und $[\![\_]\!]_{\_} : \Lambda \times (\mathsf{V} \to \mathsf{D}) \to \mathsf{D}$, so dass folgende Gesetze erfüllt sind:

$$\begin{array}{lcl} [\![x]\!]_\rho & = & \rho(x) \\ [\![r\,s]\!]_\rho & = & \mathsf{App}([\![r]\!]_\rho, [\![s]\!]_\rho) \\ \mathsf{App}([\![\lambda x t]\!]_\rho, d) & = & [\![t]\!]_{\rho[x \mapsto d]} \end{array}$$

Sei nun $\mathsf{D} = \Lambda/{=_\beta}$. Wenn $r \in \Lambda$, so ist $\overline{r} = \{r' \mid r' =_\beta r\} \in \mathsf{D}$ die β-Äquivalenzklasse von r. Wir setzen $\mathsf{App}(\overline{r}, \overline{s}) = \overline{r\,s}$ und $[\![r]\!]_\rho = \overline{r[\rho]}$ wobei $r[\rho]$ die parallele Substitution von einem Repräsentanten $t \in \rho(x)$ für alle x in r bezeichne.

Zeigen Sie, dass $(\mathsf{D}, \mathsf{App}, [\![\_]\!]_\_)$ eine applikative Struktur ist. Insbesondere:

a) App und $[\![\_]\!]_\_$ sind wohldefiniert. (D.h., das Ergebnis hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten ab.)

b) Die obigen Gesetze gelten.

Aufgabe H-27 (Realisierbarkeit): Sei $(\mathsf{D}, \mathsf{App}, [\![\_]\!]_\_)$ eine *beliebige* applikative Struktur. Einfache Typen sind gegeben durch die Grammatik $A, B ::= o \mid A \to B$ mit einem Grundtypen. Eine Realisierbarkeitsinterpretation ist definiert durch $[\![o]\!] \subseteq \mathsf{D}$ beliebig und

$$[\![A \to B]\!] = \{e \in \mathsf{D} \mid \mathsf{App}(e, d) \in [\![B]\!] \text{ für alle } d \in [\![A]\!]\}.$$

Wir setzen $\rho \in [\![\Gamma]\!]$ gdw. $\rho(x) \in [\![A]\!]$ für alle $(x\!:\!A) \in \Gamma$.

Beweisen Sie: Wenn $\Gamma \vdash t : C$ und $\rho \in [\![\Gamma]\!]$, dann $[\![t]\!]_\rho \in [\![C]\!]$.

Aufgabe H-28 (Schwache Normalisierung mittels Modell): Sei NF die Menge der β-Normalformen von Λ. Mit den Definitionen der vorigen Aufgaben setzen wir $[\![o]\!] = \mathcal{W} = \{\overline{r} \mid r \in \mathsf{NF}\} \subseteq \mathsf{D}$ und $\mathcal{N} = \{\overline{x\,\vec{r}} \mid \vec{r} \in \mathsf{NF}\} \subseteq \mathcal{W}$.

Zeigen Sie:

a) Für alle Typen A gilt $\mathcal{N} \subseteq [\![A]\!] \subseteq \mathcal{W}$.

b) Falls $\Gamma \vdash t : C$, dann hat t eine β-Normalform. [Hinweis: Benutzen Sie die vorige Aufgabe mit $\rho(x) = \overline{x}$.]

Abgabe freiwillig.