Institut für Informatik
der Universität München
Dr. Andreas Abel

WS 2008/09

5. November 2008

Übungen zur Vorlesung
Lambda-Kalkül

Blatt 2

Aufgabe P-6 (Multiplikation auf Church-Ziffern): Definieren Sie einen Term mult, so dass $\mathsf{mult}\,\ulcorner n\urcorner\ulcorner m\urcorner =_\beta \ulcorner n \cdot m\urcorner$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$,

Aufgabe P-7 (Alternatives Ziffernsystem): Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den λ-Term $\ulcorner n\urcorner$ wie folgt:

$$\begin{array}{lcl} \ulcorner 0\urcorner & := & \mathsf{I} := \lambda xx \\ \ulcorner n+1\urcorner & := & \langle \mathsf{F}, \ulcorner n\urcorner\rangle = \lambda x.\, x\,\mathsf{F}\,\ulcorner n\urcorner = \lambda x.\, x\,(\lambda yz.z)\,\ulcorner n\urcorner \end{array}$$

Definieren sie für dieses Ziffernsystem Vorgänger- und Nachfolger-Funktion und Test auf Null.

Aufgabe P-8 (Wechselseitige Rekursion): Sei Fix ein Fixpunkt-Kombinator, d.h., $\mathsf{Fix}\,x =_\beta x\,(\mathsf{Fix}\,x)$. Sei $p \equiv \mathsf{Fix}\,(\lambda\langle x, y\rangle.\langle t_1, t_2\rangle)$, $X \equiv \mathsf{fst}\,p$ und $Y \equiv \mathsf{snd}\,p$. Zeigen Sie, dass $X =_\beta t_1[X/x][Y/y]$ und $Y =_\beta t_2[X/x][Y/y]$.

Aufgabe P-9 (Modifizierte Diamanteigenschaft): Eine Relation $\longrightarrow$ habe die *modifizierte Diamanteigenschaft* falls $t \longrightarrow t_1$ und $t \longrightarrow t_2$ impliziert: Entweder $t_1 \equiv t_2$ oder es gibt ein t_3 mit $t_1 \longrightarrow t_3$ und $t_2 \longrightarrow t_3$. Zeigen Sie:

a) Hat $\longrightarrow$ die modifizierte Diamanteigenschaft, so ist $\longrightarrow$ konfluent.

b) Eta-Reduktion $\longrightarrow_\eta$ ist die kleinste kompatible Relation über dem Axiomenschema: $\lambda x.\,(t\,x) \longrightarrow_\eta t$ falls $x \notin \mathsf{FV}(t)$. Zeigen Sie, dass $\longrightarrow_\eta$ die modifizierte Diamanteigenschaft besitzt.

Aufgabe H-3 (Barendregt): Finden Sie Terme K^∞, r mit $\mathsf{K}^\infty\,x =_\beta \mathsf{K}^\infty$ und $r\,x =_\beta x\,r$.

Aufgabe H-4 (Ein *hack*: Exponentiation of Church-Ziffern): Zeigen Sie für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $f \in \Lambda$:

a) $\ulcorner m\urcorner(\ulcorner n\urcorner f) =_\beta \ulcorner m \cdot n\urcorner f$. (Komposition = Multiplikation.)

b) $\ulcorner n\urcorner\ulcorner m\urcorner(\lambda x.\, f\,x) =_\beta \ulcorner m^n\urcorner(\lambda x.\, f\,x)$. (Applikation = Exponentiation.)

Aufgabe H-5 (Konfluenz und Seiteneffekte): Programmiersprachen mit Seiteneffekten sind nicht konfluent, deswegen ist dort die Auswertungsreihenfolge fest vorgeschrieben.

Betrachten Sie die Sprache L, die den λ-Kalkül um einen 1-Bit-Speicher erweitert, d.h. um Konstanten $0, 1$ (Bit-Werte), get (Lesen des Speichers) und set (Schreiben des Speichers). Die Reduktion $\longrightarrow$ ist eine binäre Relation auf $\{0, 1\} \times L$, induktiv definiert durch die folgenden Regeln:

$$\frac{}{(b, \mathsf{get}) \longrightarrow (b, b)} \qquad \frac{}{(b, \mathsf{set}\,0) \longrightarrow (0, 0)} \qquad \frac{}{(b, \mathsf{set}\,1) \longrightarrow (1, 1)}$$

$$\frac{}{(b, (\lambda x t)\, s) \longrightarrow (b, t[s/x])} \qquad \frac{(b, t) \longrightarrow (b', t')}{(b, \lambda x t) \longrightarrow (b', \lambda x t')}$$

$$\frac{(b, r) \longrightarrow (b', r')}{(b, r\, s) \longrightarrow (b', r'\, s)} \qquad \frac{(b, s) \longrightarrow (b', s')}{(b, r\, s) \longrightarrow (b', r\, s')}$$

Z.B. $(1, \mathsf{set}\,\mathsf{get}) \longrightarrow (1, \mathsf{set}\,1) \longrightarrow (1, 1)$. Zeigen Sie, dass $\longrightarrow$ nicht konfluent ist.

Aufgabe H-6 (Lokale Konfluenz von surjektiven Paaren): Betrachten Sie die Erweiterung des λ-Kalküls um einen Konstruktor und Destruktoren für Paare, d.h., um drei Konstanten fst, snd, Pair. Wir schreiben $\langle t_1, t_2 \rangle$ für $\mathsf{Pair}\, t_1\, t_2$ (Konstante Pair angewendet auf zwei Terme). Die Relation $\longrightarrow$ sei die kleinste kompatible Relation über den Axiomen β und

$$\frac{}{\mathsf{fst}\, \langle t_1, t_2 \rangle \longrightarrow t_1} \qquad \frac{}{\mathsf{snd}\, \langle t_1, t_2 \rangle \longrightarrow t_2} \qquad \frac{}{\langle \mathsf{fst}\, t,\ \mathsf{snd}\, t \rangle \longrightarrow t}.$$

Beweisen Sie, dass $\longrightarrow$ lokal konfluent ist. Dabei genügt es für jeden auftretenden Fall ein kommutierendes Diagramm zu zeichnen, z.B.:

$$\begin{tikzcd}
 & (\lambda x t)\, s \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(\lambda x t)\, s' \arrow[dr, dotted] & & t[s/x] \arrow[dl, dotted, "*"] \\
 & t[s'/x] &
\end{tikzcd}$$

Abgabe der bearbeiteten Übungen (H-3 bis H-6): Mittwoch, 19. November 2008, zu Beginn der Vorlesung. Wurden die Aufgaben in einem Zweierteam bearbeitet, können die Lösungen auch gemeinsam eingereicht werden.