Institut für Informatik
der Universität München
Prof. M. Hofmann
Dr. A. Abel

WS 2007/2008

5. November 2007

Übungen zur Vorlesung
Rechnergestütztes Beweisen

Blatt 3

Aufgabe 7: [zChaff, 6 Punkte] Eine Implementierung der DPLL-Prozedur ist zChaff, welches versucht, eine erfüllende Variablenbelegung für eine Klauselmenge zu finden. Die Klauselmenge wird als Textdatei übergeben, z.B. habe die Datei `pidgeon3.cnf` folgenden Inhalt:

```
c Passen 3 Tauben in 2 Schläge?
p cnf 32 9
11 12 0
21 22 0
31 32 0
-11 -21 0
-11 -31 0
-21 -31 0
-12 -22 0
-12 -32 0
-22 -32 0
```

Zeilen, die mit `c` beginnen, sind Kommentarzeilen. Dann folgt ein Eintrag `p cnf` (für *conjunctive normal form*), gefolgt von der Anzahl der Variablen und der Anzahl der Klauseln. Schliesslich werden die Klauseln aufgelistet. Jede Klausel besteht aus einer Liste von Zahlen, terminiert durch eine Null. Dabei steht eine positive Zahl n für das Literal A_n, eine negative Zahl $-n$ für das Literal $\neg A_n$. Nicht jede Variable muss auch in den Klauseln erwähnt sein. Der Aufruf `zchaff pidgeon3.cnf` sollte nun `RESULT: UNSAT` ausgeben, da die Klauselmenge unerfüllbar ist.

Erzeugen Sie `.cnf`-Dateien für die Aussagen

1. 3 Tauben passen in 3 Schläge, und
2. 4 Tauben passen in 3 Schläge, und

testen Sie die (Un)erfüllbarkeit mit zChaff. (zChaff ist am CIP Pool installiert.)

Aufgabe 8: [Papier, 2 Punkte] Beweisen Sie folgende Aussagen im Sequenzenkalkül.

1. $\forall x{:}\tau.\,(P \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P \Rightarrow \exists x{:}\tau.Q(x))$.
2. $(\exists x{:}\tau.\,\top) \wedge (P \Rightarrow \exists x{:}\tau.Q(x)) \Rightarrow \exists x{:}\tau.\,P \Rightarrow Q(x)$.

Aufgabe 9: [PVS, 2 Punkte] Formalisieren und beweisen Sie die Aussagen der letzten Aufgabe in PVS, wobei Skolemisierung (`skolem`) und Instantiierung (`inst`) explizit durchgeführt werden müssen (also kein `grind` oder ähnliche Entscheidungsprozeduren).

Aufgabe 10: [PVS, 10 Punkte] Axiomatisieren Sie in PVS das Konzept einer partiell geordneten Menge, d.h. einer Menge mit einer darauf definierten reflexiven und transitiven Relation $\preceq$. Beweisen Sie die untenstehenden Behauptungen mit PVS.

1. Zwei Elemente a, b heissen äquivalent, wenn sie in beiden Richtungen in der Relation stehen, also $a \preceq b$ und $b \preceq a$ gilt.

   Zeigen Sie, dass gilt: Sind a und b äquivalent zueinander, so sind sie zu genau denselben Elementen äquivalent.

2. Ein Supremum zu a und b ist ein in der Ordnung $\preceq$ minimales Element c mit $a \preceq c$ und $b \preceq c$.

   Zeigen Sie, dass alle Suprema zu gegebenen a und b äquivalent sind.

3. Zeigen Sie, dass $a \preceq b$ gilt genau dann wenn das Supremum von a und b äquivalent zu b ist.

4. [3 Sonderpunkte] Ein Ideal in einer partiell geordneten Menge ist eine Teilmenge, die nach unten abgeschlossen ist, d.h. mit a enthält sie auch jedes b mit $b \preceq a$.

   Formalisieren Sie dieses Konzept, und zeigen Sie, dass Ideale unter Durchschnitten abgeschlossen sind.

Abgabe: Montag, 12.11., 10.15 Uhr in der Übung. Mailen Sie die erstellten `.cnf`, `.pvs` und `.prf` Dateien vorher an `abel@informatik.uni-muenchen.de`.