Institut für Informatik
der Universität München
Dipl. Inf. Andreas Abel

WS 2006/07

2. Februar 2007

Übungen zur Vorlesung
Lambda-Kalkül

Blatt 7

Aufgabe P-19 (Imprädikative Kodierung): Definieren Sie binäre, knotenbeschriftete Bäume $\mathsf{BTree}\, A$ imprädikativ in System F. Programmieren Sie damit eine Funktion vom Typ $\forall A.\, \mathsf{BTree}\, A \to \mathsf{List}\, A$, die alle Knotenmarkierungen aufsammelt.

Aufgabe P-20 (Imprädikative Kodierung II): Was sind die imprädikativen Kodierungen von 0 (dem leeren Typ), 1 (dem einelementigen Typ) und von 2 (dem Typ der Booleans)?

Aufgabe P-21 (Substitutionsregeln in System F): Dies ist eine alternative Formulierung der Typisierungsregeln für System F:

$$\textsc{ty-var}\ \frac{\Gamma(x) = A}{\Gamma \vdash x : A}$$

$$\textsc{ty-abs}\ \frac{\Gamma, x\!:\!A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda xt : A \to B} \qquad \textsc{ty-app}\ \frac{\Gamma \vdash r : A \to B \qquad \Gamma \vdash s : A}{\Gamma \vdash r\, s : B}$$

$$\textsc{ty-gen}\ \frac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash t : \forall X A}\ X \notin \mathsf{FV}(\Gamma) \qquad \textsc{ty-inst}\ \frac{\Gamma \vdash t : \forall X A}{\Gamma \vdash t : A[B/X]}$$

Dabei sind Kontexte Γ endliche Abbildungen von Termvariablen auf Typen und $\mathsf{FV}(\Gamma) = \bigcup_{\Gamma(x)=A} \mathsf{FV}(A)$ bezeichnet die Menge der freien Typvariablen von Γ. Substitution auf Kontexten ist definiert durch $(\Gamma[B/X])(x) = (\Gamma(x))[B/X]$;

Zeigen Sie:

a) (Typsubstitution:) Wenn $\Gamma \vdash t : C$, dann $\Gamma[B/X] \vdash t : C[B/X]$.

b) (Termsubst.:) Wenn $\Gamma, x\!:\!A \vdash t : B$ und $\Gamma \vdash s : A$, dann $\Gamma \vdash t[s/x] : B$.

Knobelaufgaben (freiwillig):

Aufgabe H-29 ($\beta\eta$-Gleichheit für normalisierende Terme): Betrachten

Sie folgende induktiv definierte Relation.

$$\frac{t[s/x]\,\vec{s} \sim r}{(\lambda x t)\,s\,\vec{s} \sim r} \qquad \frac{r \sim t[s/x]\,\vec{s}}{r \sim (\lambda x t)\,s\,\vec{s}} \qquad \frac{t \sim t'}{\lambda x t \sim \lambda x t'}$$

$$\frac{s_i \sim s_i' \text{ für alle } 1 \leq i \leq |\vec{s}| = |\vec{s}'|}{x\,\vec{s} \sim x\,\vec{s}'} \qquad \frac{t \sim y\,\vec{s}\,x}{\lambda x t \sim y\,\vec{s}}\; x \notin \mathsf{FV}(y\,\vec{s}) \qquad \frac{y\,\vec{s}\,x \sim t}{y\,\vec{s} \sim \lambda x t}\; x \notin \mathsf{FV}(y\,\vec{s})$$

Zeigen Sie:

a) Wenn $t \sim t'$, dann $t =_{\beta\eta} t'$.

b) Wenn $t, t' \in \mathsf{WN}$ und $t =_{\beta\eta} t'$, dann $t \sim t'$.

Welcher Algorithmus zum Testen von $\beta\eta$-Gleichheit normalisiernder Terme ergibt sich aus der Relation $t \sim t'$?

Aufgabe H-30 (Subject Reduction in System F): Betrachten Sie die Typisierungsregeln für das System F im Curry-Stil wie oben angegeben. Zeigen Sie:

a) Wenn $\Gamma \vdash \lambda x t : C$, dann ist $C = \forall X_1 \ldots \forall X_n.\, A \to B$.

b) Wenn $\Gamma \vdash \lambda x t : \forall \vec{X}.\, A \to B$ dann $\Gamma, x\!:\!A \vdash t : B$ mit $X_i \notin \mathsf{FV}(\Gamma)$ für alle i. [Hinweis: Verwenden Sie Typsubstitution (s.o.).]

c) Wenn $\Gamma \vdash t : C$ and $t \longrightarrow_\beta t'$, dann $\Gamma \vdash t' : C$ [Hinweis: Induktion über die Typherleitung.]

Aufgabe H-31 (Schwache Normalisierung von System F): Erweitern Sie H-28 und zeigen Sie, dass System F schwach normalisierend ist. Die Interpretation der Typen ist nun parametrisiert durch eine Belegung σ der Typvariablen mit Mengen $\mathcal{A}$.

$$\begin{array}{lcl} [\![X]\!]_\sigma & = & \sigma(X) \\ [\![A \to B]\!]_\sigma & = & \{e \mid e\,d \in [\![B]\!]_\sigma \text{ for all } e \in [\![A]\!]_\sigma\} \\ [\![\forall X A]\!]_\sigma & = & \bigcap_{\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}} [\![X]\!]_{\sigma[X \mapsto \mathcal{A}]}. \end{array}$$

Zeigen Sie:

a) $[\![A[B/X]]\!]_\sigma = [\![A]\!]_{\sigma[X \mapsto [\![B]\!]_\sigma]}$.

b) Wenn $\mathcal{N} \subseteq \sigma(X) \subseteq \mathcal{W}$ für alle X, dann $\mathcal{N} \subseteq [\![A]\!]_\sigma \subseteq \mathcal{W}$.

c) Falls $\Gamma \vdash t : C$ und $\rho(x) \in [\![\Gamma(x)]\!]_\sigma$ für alle x, dann $[\![t]\!]_\rho \in [\![C]\!]_\sigma$.

d) Falls $\Gamma \vdash t : C$, dann hat t eine Normalform. [Verwenden Sie die konstante Belegung: $\sigma(X) = \mathcal{N}$].