Institut für Informatik
der Universität München
Dipl. Inf. Andreas Abel

WS 2006/07

19. Januar 2007

Übungen zur Vorlesung
Lambda-Kalkül

Blatt 6

Aufgabe P-17 (De Morgan): Die de Morganschen Gesetze $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ und $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ kann man als vier Implikationen schreiben. Welche dieser Implikationen sind auch konstruktiv gültig?

Aufgabe P-18 (Modell: Terme modulo β): Ein *schwaches Modell* des ungetypten λ-Kalküls Λ ist eine Menge D mit Operationen $\mathsf{App} : \mathsf{D} \times \mathsf{D} \to \mathsf{D}$ und $[\![\_]\!]_{\_} : \Lambda \times (\mathsf{V} \to \mathsf{D}) \to \mathsf{D}$, so dass folgende Gesetze erfüllt sind:

$$\begin{array}{lcl} [\![x]\!]_\rho & = & \rho(x) \\ [\![r\,s]\!]_\rho & = & \mathsf{App}([\![r]\!]_\rho, [\![s]\!]_\rho) \\ \mathsf{App}([\![\lambda xt]\!]_\rho, d) & = & [\![t]\!]_{\rho[x \mapsto d]} \end{array}$$

Sei nun $\mathsf{D} = \Lambda/{=_\beta}$. Wenn $r \in \Lambda$, so ist $\overline{r} = \{r' \mid r' =_\beta r\} \in \mathsf{D}$ die β-Äquivalenzklasse von r. Wir setzen $\mathsf{App}(\overline{r}, \overline{s}) = \overline{r\,s}$ und $[\![\overline{r}]\!]_\rho = \overline{r[\rho]}$ wobei $r[\rho]$ die parallele Substitution von einem Repräsentanten $\rho(x)$ für alle x in r bezeichne.

Zeigen Sie, dass $(\mathsf{D}, \mathsf{App}, [\![\_]\!]_{\_})$ ein schwaches Modell von Λ ist. Insbesondere:

a) App und $[\![\_]\!]_{\_}$ sind wohldefiniert. (D.h., das Ergebnis hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten ab.)

b) Die obigen Gesetze gelten.

Aufgabe H-25 (Beweisterme, 6 Punkte): Geben sie Beweisterme für die folgenden Aussagen an:

a) $(A \Rightarrow (B \wedge C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$,

b) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow (B \wedge C)$,

c) $A \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,

d) $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \Rightarrow A \vee (B \wedge C)$,

e) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow A \Rightarrow \neg B$,

f) $(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$.

Aufgabe H-26 (Doppelnegation, 4 Punkte): Konstruktiv gilt das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten zwar nicht, jedoch dessen doppelte Negation $\neg\neg(A \vee \neg A)$. Beweisen Sie diese Aussage im Kalkl des natürlichen Schließens.

Aufgabe H-27 (Realisierbarkeit, 4 Punkte): Sei $(\mathsf{D}, \mathsf{App}, [\![\_]\!]_{\_})$ ein *beliebiges* schwaches Modell (P-18) von Λ. Einfache Typen sind gegeben durch die Grammatik $A, B ::= o \mid A \to B$ mit einem Grundtypen. Eine Realsierbarkeitsinterpretation ist definiert durch $[\![o]\!] \subseteq \mathsf{D}$ beliebig und

$$[\![A \to B]\!] = \{e \in \mathsf{D} \mid \mathsf{App}(e, d) \in [\![B]\!] \text{ für alle } d \in [\![A]\!]\}.$$

Wir setzen $\rho \in [\![\Gamma]\!]$ gdw. $\rho(x) \in [\![A]\!]$ für alle $(x\!:\!A) \in \Gamma$.

Beweisen Sie: Wenn $\Gamma \vdash t : C$ und $\rho \in [\![\Gamma]\!]$, dann $[\![t]\!]_\rho \in [\![C]\!]$.

Aufgabe H-28 (Schwache Normalisierung mittels Modell, 6 Punkte): Sei NF die Menge der β-Normalformen von Λ. Mit den Definitionen von P-18 und H-27 setzen wir $[\![o]\!] = \mathcal{W} = \{\overline{r} \mid r \in \mathsf{NF}\} \subseteq \mathsf{D}$ und $\mathcal{N} = \{\overline{x\,\vec{r}} \mid \vec{r} \in \mathsf{NF}\} \subseteq \mathcal{W}$.

Zeigen Sie:

a) Für alle Typen A: $\mathcal{N} \subseteq [\![A]\!] \subseteq \mathcal{W}$.

b) Falls $\Gamma \vdash t : C$, dann hat t eine β-Normalform. [Hinweis: Benutzen Sie H-27 mit $\rho(x) = \overline{x}$.]

Abgabe am 26.01.2007 in der Vorlesung.