Institut für Informatik
der Universität München
Dipl. Inf. Andreas Abel

WS 2006/07

22. Dezember 2006

Übungen zur Vorlesung
Lambda-Kalkül

Blatt 5

Hinweis: Lösen Sie zuerst die letzten beiden Aufgaben.

Aufgabe P-15 (Typisierbarkeit von Teiltermen): Ein Term t heißt typisierbar, wenn es einen Kontext Γ und einen Term A gibt, so dass $\Gamma \vdash t : A$. Zeigen Sie:

a) Jeder Teilterm eines typisierbaren Terms ist wieder typisierbar.

b) Ist t typisierbar, dann auch λxt.

c) Sind r und s typisierbar, dann nicht unbedingt auch $r\,s$.

Aufgabe P-16 (Getypte s.n. terme): Die 3-stelligen Relationen $\Gamma \vdash t \downarrow C$ und $\Gamma \vdash t \uparrow C$ sind induktiv gegeben durch die folgenden Regeln:

$$\textsc{ty-sn-var}\ \frac{}{\Gamma \vdash x \downarrow \Gamma(x)} \qquad \textsc{ty-sn-app}\ \frac{\Gamma \vdash r \downarrow A \to B \qquad \Gamma \vdash s \uparrow A}{\Gamma \vdash r\,s \downarrow B}$$

$$\textsc{ty-sn-ne}\ \frac{\Gamma \vdash r \downarrow A}{\Gamma \vdash r \uparrow A} \qquad \textsc{ty-sn-abs}\ \frac{\Gamma, x\!:\!A \vdash t \uparrow B}{\Gamma \vdash \lambda xt \uparrow A \to B}$$

$$\textsc{ty-sn-exp}\ \frac{\Gamma \vdash s \uparrow A \qquad \Gamma \vdash r[s/x]\,\vec{s} \uparrow C}{\Gamma \vdash (\lambda xr)\,s\,\vec{s} \uparrow C}$$

Ein Term heisst *neutral*, wenn er von der Form $x\,\vec{s}$ ist. Beweisen Sie (simultan):

a) Wenn $\Gamma \vdash t \downarrow A$, dann ist t neutral und $t \in \mathsf{SN}$.

b) Wenn $\Gamma \vdash t \uparrow A$, dann $t \in \mathsf{SN}$.

Aufgabe H-18 (Typberechnung, 4 Punkte): Gegeben ein Typisierungskontext Γ und ein Church-Term t berechnet die Funktion $\mathsf{typeOf}(\Gamma \vdash t)$ den Typ A von t durch Rekursion über t. Falls t nicht wohlgetypt ist in Γ, wird $\emptyset$ zurückgegeben. Definieren Sie typeOf.

Aufgabe H-19 (Typisierung von Church-Numeralen, 6 Punkte): Sei $\underline{m} := \lambda f x.\, f^m\, x$ die m-te Church-Ziffer, wie gehabt. Finden Sie, falls existent, Typen A_a, A_m, A_e, mit

a) $\vdash \lambda f x.\, \underline{m}\, f\, (\underline{n}\, f\, x) : A_a$

b) $\vdash \lambda f.\, \underline{m}\, (\underline{n}\, f) : A_m$

c) $\vdash \underline{m}\, \underline{n} : A_e$.

Welche Typen erhalten jeweils die Teilterme $\underline{m}$ und $\underline{n}$?

Aufgabe H-20 (Pierce-Formel, 4 Punkte): Seien a, b Grundtypen. Zeigen Sie, dass es keinen Term t gibt mit $\vdash t : ((a \to b) \to a) \to a$. [Hinweis: Es genügt, normale Terme zu betrachten. Warum?]

Aufgabe H-21 (Abschluss von getypten s.n. Termen unter Applikation, 6 Sonderpunkte): Siehe P-16. Sei $\Gamma \vdash s \uparrow A$.

a) Wenn $\mathcal{D} :: \Gamma, x\!:\!A \vdash t \downarrow C$, dann entweder $\Gamma \vdash t[s/x] \downarrow C$ oder $\mathsf{ord}(C) \leq \mathsf{ord}(A)$ und $\Gamma \vdash t[s/x] \uparrow C$.

b) Wenn $\mathcal{D} :: \Gamma, x\!:\!A \vdash t \uparrow C$, dann $\Gamma \vdash t[s/x] \uparrow C$.

c) Wenn $\mathcal{D} :: \Gamma \vdash t \uparrow A \to C$, dann $\Gamma \vdash t\, s \uparrow C$.

Beweisen Sie simultan diese 3 Aussagen, durch lexikographische Induktion über $(\mathsf{ord}(A), \mathcal{D})$.

Aufgabe H-22 (S.N. für getypte Terme, 4 Punkte): Beweisen Sie: Falls $\Gamma \vdash t : C$, dann ist t s.n. Benutzen Sie dabei die Resultate von P-16 und H-21.

Aufgabe H-23 (W-Bäume I, 1 Punkt): Als W-Baum bezeichnet man einen λ-Term, gesehen als Baum, in dem der rechte Teilbaum jedes Applikationsknotens *einfach* ist, d.h. selbst keine Applikation ist.

Sei t ein Term in β-Normalform. Beweisen oder widerlegen Sie: Ist t ein W-Baum, so auch

$$t' \equiv (\lambda xyfr.\, y\, f\, x)\, t\, (\lambda z.\, (\lambda yxo.\, x\, y)\, (\lambda es.\, z\, e\, s)\, (\lambda yh.y)).$$

Aufgabe H-24 (W-Bäume II, 1 Punkt): Sei t' wie in H-23. Berechnen Sie die β-Normalform von t'.

Abgabe am 12.01.2007 in der Vorlesung.