Institut für Informatik
der Universität München
Dipl. Inf. Andreas Abel

WS 2006/07

24. November 2006

Übungen zur Vorlesung
Lambda-Kalkül

Blatt 3

Aufgabe P-9 (Barendregt 2.4.2): Wir schreiben $r \# s$, wenn die Gleichung $r =_\beta s$ die β-Theorie inkonsistent macht, d.h., wenn aus $r =_\beta s$ schon $t =_\beta t'$ für beliebige Terme t, t' folgt. Zeigen Sie $\mathsf{I} \# \mathsf{F}$ und $\mathsf{I} \# \mathsf{T}$.

Aufgabe P-10 (Barendregt 11.5.6): Sei $\omega \equiv \lambda x.\, x\, x$, $\Omega \equiv \omega\, \omega$, $\omega' \equiv \lambda y.\, \omega y$ und $\Omega' \equiv \omega'\, \omega'$. Zeigen Sie, dass $\Omega' \longrightarrow_{\mathsf{s}} \Omega$, aber $\Omega' \not\longrightarrow_{\mathsf{l}}^* \Omega$.

Aufgabe P-11 (Call-By-Value Lambda-Kalkül): Ein *Wert* ist entweder eine Variable oder eine λ-Abstraktion. Im Folgenden steht v immer für einen Wert. Call-by-value-Ein-Schritt-Reduktion ist die kongruente Hülle des Axiomenschemas $(\lambda x t)\, v \longrightarrow_{\beta_{\mathsf{v}}} t[v/x]$. Die schwache Kopf-Reduktion ist induktiv definiert durch:

$$\frac{}{(\lambda x t)\, v \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} t[v/x]} \qquad \frac{r \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} r'}{r\, s \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} r'\, s} \qquad \frac{s \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} s'}{v\, s \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} v\, s'}$$

Zeigen Sie:

a) $\longrightarrow_{\mathsf{wh_v}}$ ist nicht substitutiv, d.h. $t \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} t'$ impliziert nicht $t[s/x] \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} t'[s/x]$ für alle s.

b) $\longrightarrow_{\mathsf{wh_v}}^*$ ist auch nicht substitutiv.

c) $\longrightarrow_{\mathsf{wh_v}}$ ist Wert-substitutiv, d.h. $t \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} t'$ impliziert $t[v/x] \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} t'[v/x]$ für alle Werte v.

d) Wenn $r \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}}^* v$ und $s \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}}^* s'$, dann $r\, s \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}}^* v\, s'$.

Aufgabe H-8 (Currying, 2 Punkte): Betrachen Sie die Erweiterung des λ-Kalküls um Paare, wie in P-7. Gegeben seine zwei beliebige λ-Terme f_1, g_2. Finden Sie Terme f_2 und g_1, so dass $f_i\, \langle r, s\rangle =_\beta g_i\, r\, s$ für alle r, s.

Aufgabe H-9 ((Schwache) Kopf-Normalform, 4 Punkte): Gegeben sind die vier Terme $t_1 \equiv \lambda x.\, \mathsf{Y}\, (\lambda f.\, f\, x)$, $t_2 \equiv \mathsf{Y}\, (\lambda f y.\, f)$, $t_3 \equiv \mathsf{Y}\, (\lambda f x.\, x\, f)$, $t_4 \equiv \mathsf{Y}\, \mathsf{succ} \equiv \mathsf{Y}\, (\lambda n f x.\, f\, (n\, f\, x)$. Beweisen oder widerlegen Sie für jedes t_i die Aussagen:

a) t_i hat eine schwache Kopf-Normalform.

b) t_i hat eine Kopf-Normalform.

Aufgabe H-10 (Barendregt 2.4.4, Assoziativität der Applikation ist inkonsistent, 4 Punkte): Beweisen Sie $(x\,y)\,z \# x\,(y\,z)$ (siehe P-9).

Aufgabe H-11 (Vollständige η-Normalisierung, 4 Punkte): Die Funktion $(\cdot)^\eta$ ist rekursiv definiert wie folgt:

$$\begin{array}{lcl} x^\eta & = & x \\ (r\,s)^\eta & = & r^\eta\,s^\eta \\ (\lambda x t)^\eta & = & \begin{cases} t' & \text{falls } t^\eta = t'\,x \text{ und } x \notin \mathsf{FV}(t') \\ \lambda x.\,t^\eta & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

Machen Sie sich an einigen Beispielen klar, dass $(\cdot)^\eta$ alle η-Redexe entfernt. Beweisen Sie für alle t: $t \longrightarrow_\eta^* t^\eta \not\longrightarrow_\eta$.

Aufgabe H-12 (Plotkin 1975, Call-By-Value Standardisierung, 6 Punkte + 4 Sonderpunkte): Standardreduktion im Call-By-Value Lambda-Kalkül ist wie folgt induktiv definiert:

$$\frac{t \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} t' \qquad t' \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} t''}{t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} t''}$$

$$\frac{}{x \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} x} \qquad \frac{t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} t'}{\lambda x t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} \lambda x t'} \qquad \frac{r \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} r' \qquad s \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} s'}{r\,s \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} r'\,s'}$$

Klar ist: $\longrightarrow_{\mathsf{s_v}}$ ist reflexiv und $\longrightarrow_{\mathsf{s_v}} \subseteq \longrightarrow_{\beta_\mathsf{v}}^*$. Zeigen Sie:

a) Wenn $t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} t'$ und $v \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} v'$, dann $t[v/x] \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} t'[v'/x]$. (2P)

b) Wenn $t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} x$, dann $t \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}}^* x$. (1P)

c) Wenn $t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} \lambda x r'$, dann $t \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}}^* \lambda x r$ und $r \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} r'$. (1P)

d) Wenn $t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} t'$ und $t' \longrightarrow_{\beta_\mathsf{v}} t''$, dann $t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} t''$. (2P+4SP)

Also ist $\longrightarrow_{\mathsf{s_v}} = \longrightarrow_{\beta_\mathsf{v}}^*$

Orientieren Sie sich an den Beweisen der Vorlesung und benutzen Sie P-11.

Abgabe wieder nächste Woche in der Vorlesung.