Institut für Informatik
der Universität München
Dipl. Inf. Andreas Abel

WS 2006/07

27. Oktober 2006

Übungen zur Vorlesung
Lambda-Kalkül

Blatt 1

Aufgabe P-1 (Regelinduktion): Sei R eine reflexive-transitive Relation (=quasi-Ordnung). Dann ist R kongruent genau dann, wenn R unter den folgenden Regeln abgeschlossen ist:

$$\textsc{cong}\ \frac{r\ R\ r' \qquad s\ R\ s'}{r\ s\ R\ r'\ s'} \qquad \xi\ \frac{t\ R\ t'}{\lambda xt\ R\ \lambda xt'}$$

Aufgabe P-2 (Paare und Projektionen): Geben Sie λ-Terme Pair, fst, und snd an, so dass für beliebige Terme r, s gilt:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{fst}\,(\mathsf{Pair}\,r\,s) & \longrightarrow_\beta^* & r \\ \mathsf{snd}\,(\mathsf{Pair}\,r\,s) & \longrightarrow_\beta^* & s \end{array}$$

Zur Erinnerung: $\longrightarrow_\beta$ ist die Ein-Schritt-β-Reduktion und $\longrightarrow_\beta^*$ ihre reflexiv transitive Hülle.

Aufgabe P-3 (Church-Ziffern): Die n-te Church-Ziffer ist definiert durch $\underline{n} = \lambda f \lambda x.\, f^n\, x$. Damit berechnet $\underline{n}\, f\, x$ ist also die n-fache Iteration der Funktion f angewandt auf Startwert x. Für die Nachfolgerfunktion $\mathsf{succ} = \lambda n.\, \lambda f \lambda x. f\ (n\ f\ x)$ überprüft man leicht, dass $\mathsf{succ}\, \underline{n} \longrightarrow_\beta^* \underline{n+1}$.

a) Sei $\mathsf{add} = \lambda n \lambda m.\, n\, \mathsf{succ}\, m$. Beweisen Sie, dass $\mathsf{add}\, \underline{n}\, \underline{m} \longrightarrow_\beta^* \underline{n+m}$.

b) Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist gegeben durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. Definieren Sie einen Term fib, so dass $\mathsf{fib}\, \underline{n} \longrightarrow_\beta^* \underline{f_n}$. Hinweis: Definieren Sie zuerst einen Term fib', so dass $\mathsf{fst}\,(\mathsf{fib}'\, \underline{n}) \longrightarrow_\beta^* \underline{f_n}$ und $\mathsf{snd}\,(\mathsf{fib}'\, \underline{n}) \longrightarrow_\beta^* \underline{f_{n+1}}$.

Aufgabe P-4 (Diskussion: Konfluenz): Überlegen Sie, welche der folgenden Aussagen gilt. Betrachten Sie dabei potentielle Gegenbeispiele.

a) Diamant-Eigenschaft: Wenn $t_0 \longrightarrow_\beta t_1$ und $t_0 \longrightarrow_\beta t_2$ dann gibt es ein t_3 mit $t_1 \longrightarrow_\beta t_3$ und $t_2 \longrightarrow_\beta t_3$.

b) Lokale Konfluenz: Wenn $t_0 \longrightarrow_\beta t_1$ und $t_0 \longrightarrow_\beta t_2$ dann gibt es ein t_3 mit $t_1 \longrightarrow_\beta^* t_3$ und $t_2 \longrightarrow_\beta^* t_3$.

c) Konfluenz: Wenn $t_0 \longrightarrow_\beta^* t_1$ und $t_0 \longrightarrow_\beta^* t_2$ dann gibt es ein t_3 mit $t_1 \longrightarrow_\beta^* t_3$ und $t_2 \longrightarrow_\beta^* t_3$.

Aufgabe H-1 (Booleans, 5 Punkte): Definieren Sie Terme T, F, und if, so dass

$$\begin{aligned} \mathsf{if}\,\mathsf{T}\,t\,e &\longrightarrow_\beta^* t \\ \mathsf{if}\,\mathsf{F}\,t\,e &\longrightarrow_\beta^* e. \end{aligned}$$

Definieren Sie auch Terme not und and mit der üblichen Semantik.

Aufgabe H-2 (Church-Ziffern, 5 Punkte): Definieren Sie Terme mult und pred, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathsf{mult}\,\underline{n}\,\underline{m} &\longrightarrow_\beta^* \underline{n \cdot m} \\ \mathsf{pred}\,\underline{n+1} &\longrightarrow_\beta^* \underline{n} \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Idee von fib, um pred zu definieren!

Aufgabe H-3 (Syntaxgerichtete Definition der α-Äquivalenz, 10 Punkte): Wiederholung: $=_\alpha$ ist die kleinste kongruente Äquivalenzrelation über dem Axiomenschema:

$$\textsc{EQ}_\alpha\text{-AX}\ \frac{}{\lambda x t =_\alpha \lambda y.\, t\{y/x\}}\ y \text{ kommt in } t \text{ nicht vor}$$

Wir definieren nun $=^\alpha$ als die kleinste Relation, die unter den folgenden Regeln abgeschlossen ist.

$$\textsc{EQ}_\alpha\text{-VAR}\ \frac{}{x =^\alpha x} \qquad \textsc{EQ}_\alpha\text{-APP}\ \frac{r =^\alpha r' \qquad s =^\alpha s'}{r\,s =^\alpha r'\,s'}$$

$$\textsc{EQ}_\alpha\text{-ABS}\ \frac{t\{y/x\} =^\alpha t'\{y/x'\}}{\lambda x t =^\alpha \lambda x' t'}\ y \text{ kommt nicht in } t, t' \text{ vor}$$

Zu zeigen ist nun, dass die beiden Definitionen der α-Äquivalenz gleichwertig sind. Anleitung:

a) Zeigen Sie die Korrektheit von $=^\alpha$, also die Aussage $t =^\alpha t' \implies t =_\alpha t'$, durch (Regel-)Induktion über die Herleitung von $t =^\alpha t'$.

b) Zeigen Sie, dass $=^\alpha$ eine Äquivalenzrelation (reflexiv, transitiv, symmetrisch) ist, jeweils durch eine geeignete Induktion.

c) Zeigen Sie schliesslich die Vollständigkeit, also die Aussage $t =_\alpha t' \implies t =^\alpha t'$, durch Induktion über die Herleitung von $t =_\alpha t'$.

Weiterführende Frage: Inwiefern ergibt sich aus $=^\alpha$ ein Algorithmus zur Entscheidung der α-Äquivalenz? (3 Sonderpunkte)

Abgabe der bearbeiteten Übungen (H-1 bis H-3): Freitag, 3. November 2006, zu Beginn der Vorlesung. Wurden die Aufgaben in einem Zweierteam bearbeitet, können die Lösungen auch gemeinsam eingereicht werden.